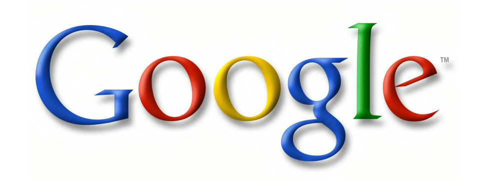



Princeton University Library
32101 044852745


VET TES TAM EN
NOV TVM
Dei Sub Numine Viget



Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Picquet, 103, boulevard Saint-Michel.

TOME XII. — N° 1.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1884

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois, à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 20 DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. PICQUET, WEILL, — Secrétaires de la Société.

COLLIGNON, HATON DE LA GOUPILLIÈRE, JORDAN, MANNHEIM, — Membres du Conseil.

9588 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55

BULLETIN

DE LA

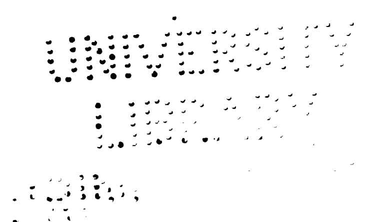
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DOUZIÈME. — ANNÉE 1883-84



PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

—

1884

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU MOIS DE JANVIER 1884 (1).

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président	M. PICARD.
Vice-Présidents	M. COLLIGNON. M. FOURET. M. LUCAS. M. PICQUET.
Secrétaires	M. POINCARÉ. M. WEILL.
Vice-Secrétaires	M. HUMBERT. M. OCAGNE (D').
Archiviste	M. STEPHANOS.
Trésorier	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	M. ANDRÉ. M. APPELL. M. CLAYEUX. M. COMBEROUSSE (DE). M. DARBOUX. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. LAISANT. M. MANNHEIM. M. ROUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents	M. CREMONA. M. GENTY. M. MATHIEU. M. TCHÉBICHEFF.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

ACHARD, directeur-adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de Chabrol, 40, à Paris.
AMIGUES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille.
ANDRÉ (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 25, à Paris.
AOUST (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, rue Espérandieu, 19, à Marseille.
APPELL, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Soufflot, 22, à Paris.
ARON (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.
ASTOR, chargé de cours à la Faculté des Sciences, boulevard de Bonne, à Grenoble.
AUBERT, élève-ingénieur des Mines, rue de Grenelle, 96, à Paris.
AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Rodez.
BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P.
BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
BÈRE, ingénieur des manufactures de l'État, à Lille.
BERTRAND (Joseph), secrét. perp. de l'Académie des Sciences, rue de Seine, 6, à Paris.
BISCHOFFSHEIM, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
BIENAYMÉ (Arthur), ingénieur de la Marine, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé), S. P.
BONCOMPAGNI (le prince Balthasar), place Colonna, palais Piombino, à Rome.
BONNET (Ossian), membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 14, à Paris.
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
BOUCHER, ancien directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue du Pin, 9, à Angers.
BOULANGER, professeur de Mathématiques, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
BRAULT (A.), négociant à Pons (Charente-Inférieure).
BRÉMARD, architecte, boulevard Malesherbes, 16, à Paris.
BRÉSARD, professeur au lycée Fontanes, rue Vézelay, 3, à Paris.
BRIOSCHI, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
BRISSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine).
BROCARD, capitaine à l'École régimentaire du Génie de Montpellier, S. P.
CARON, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
CATALAN, professeur à l'Université, à Liège (Belgique).
CHASLES, membre de l'Institut (décédé), S. P.
CHEMIN, ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Rennes, 73, à Paris.
CIVIALE, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
CLAYEUX, intendant divisionnaire, avenue de Clichy, 52, à Paris.
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
COLLET, professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
COMBEROUSSE (DE), professeur à l'École Centrale, rue Blanche, 45, à Paris.
COURCELLES, professeur de Mathematiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 68, à Paris.
CREMONA, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.
CRETIN, professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 107, à Paris.
DARBOUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
DAVID, lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, place de l'École d'Artillerie, 42, à Toulouse.
DEFFORGES, capitaine d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, rue de Grenelle Saint-Germain, 123, à Paris.
DELANNOY, sous-intendant militaire, à Orléans.
DERUYTS, docteur ès sciences, hôtel du Sénat, rue de Tournon, 7, à Paris.
DEWULF, lieutenant-colonel, chef du Génie, a Montpellier.
DOSTOR, docteur ès sciences, rue de Rennes, 121, à Paris.
DREYFUS (Ferdinand), publiciste, rue de l'Université, 25, à Paris.
DURRANDE, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.

ESCARY, professeur au Prytanée militaire, à la Flèche (Sarthe).
FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
FLEUREAU, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Flandre, 81, à Paris.
FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jeanne-d'Arc, 9, à Nancy.
FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
FONTÈS, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Mont-de-Marsan.
FOURET, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
GARIEL, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Jouffroy, 39, à Paris-Batignolles.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
GENOCCHI, professeur à l'Université, rue du Pô, 38, à Turin (Italie).
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
GERONO, rue Hallé, 40 et 42, à Paris.
GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, rue de Charenton, 319, à Paris.
GOFFART, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, rue Riguepels, 22, à Toulouse.
GRAINDORGE, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
GRUEY, directeur de l'Observatoire, à Besançon.
GUCCIA (Jean), via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
GUÉLOT, lieutenant-colonel au 118e régiment d'infanterie, à .
GUNTHER (Dr Sigismond), député au Reichstag allemand, à Ansbach (Bavière).
HAAG, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
HABICH, directeur de l'École des Mines, à Lima (Pérou).
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gounod, 8, à Paris, S. P.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Mines, rue Garancière, 8, à Paris, S. P.
HATT, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
HENRY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
HENRY (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Berthollet, 22, à Paris.
HERMARY, chef d'escadrons au 17e régiment d'Artillerie, à Douai (Nord).
HERMITE, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
HILAIRE, professeur de Mathématiques, rue d'Arras, 4, à Douai (Nord).
HIRST, directeur des études de l'École navale, à Greenwich (Angleterre), S. P.
HOLST (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
HOUBIGANT, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
HUGONIOT, capitaine d'Artillerie de la Marine, rue de l'Arsenal, 11, à Paris.
HUMBERT, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
HUYOT, ingénieur des Mines, rue du Cirque, 10, à Paris.
IMBER, répétiteur à l'École Centrale, boulevard Beaumarchais, 109, à Paris.
JACQUIER, ingénieur des Ponts et Chaussées, directeur des Travaux publics à Saint-Denis (Réunion).
JANIN, capitaine au 32e régiment d'Artillerie, à Orléans.
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 28, à Paris.
JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varennes, 48, à Paris, S. P.
JOUFFRET, chef d'escadrons d'Artillerie, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, à Milan (Italie).
KANTOR (S.), privat-docent à l'École polytechnique allemande, à Prague.
KŒNIGS, professeur à la Faculté des Sciences, à Besançon.
KOSTENEC (Antoine), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
KOVALEWSKY (Mme de), privat-docent à l'Université de Stockholm (Suède).
KRONECKER (Dr Léopold), professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin.
LACOR, chargé de cours à la Faculté libre des Sciences, rue des Pyramides, 4, à Lille.
LAFFON DE LADEBAT, amiral (décédé), S. P.

LAGUERRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 61, à Paris.
LAISANT, député, avenue Victor Hugo, 84 *bis*, à Paris.
LAQUIÈRE, administrateur attaché au service central des Affaires indigènes, à Alger.
LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
LAVEISSIÈRE, élève externe à l'École des Mines, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
LÉAUTÉ, directeur des études à l'école Monge, 141, boulevard Malesherbes, à Paris.
LEBON (Ernest), professeur au lycée Charlemagne, rue Monge, 121, à Paris.
LECORNU, ingénieur des Mines, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Caen (Calvados).
LEFÈVRE, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, à Bar-le-Duc.
LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
LE PONT, rue du Bouloi, 11, à Paris.
LESAGE, professeur au lycée Charlemagne, rue Monge, 27, à Paris.
LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
LÉVY (Léon), ingénieur des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
LÉVY (Lucien), professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Claude-Bernard, 58, à Paris.
LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, boul. Saint-Germain, 258, à Paris.
LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Kœnigsberg (Allemagne).
LONGCHAMPS (GOHIERRE DE), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne, rue de l'Estrapade, 15, à Paris.
LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du faubourg Saint-Honoré, 186, à Paris.
LUCAS, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Bellay, 4, à Paris.
MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue de l'Odéon, 21, à Paris.
MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 117, à Paris.
MALLOIZEL, rue de l'Estrapade, 11, à Paris.
MALMSTÉN, conseiller d'État, à Upsal (Suède).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
MARSILLY (le général DE), rue Chante-Pinot, à Auxerre.
MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jean, 22, à Nancy.
MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
MOUTARD, examinateur à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
OCAGNE (D'), élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, rue du 4-Septembre, 18, à Paris.
OHRTMANN (Dr Carl), rédacteur du *Jahrbuch*, Markgrafenstrasse, 78, à Berlin.
OVIDIO (Enrico D'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin.
PANEK (Auguste), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
PARMENTIER (le général), membre du Comité des fortifications, rue du Cirque, 5, à Paris.
PARRAN, ingénieur des Mines, avenue de l'Opéra, 26, à Paris.
PATURET, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Jacob, 44, à Paris.
PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
PELLETREAU, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
PERCIN, chef d'escadrons d'Artillerie, à l'École spéciale militaire, à Saint-Cyr.
PERRIN, ingénieur des Mines, rue de l'Étoile, 17, au Mans.
PEROTT (Joseph), à Port-Navalo, par Arzon (Morbihan), S. P.
PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
PICARD (Émile), professeur suppléant à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
PICQUET, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
PISTOYE (DE), capitaine d'Artillerie, rue Montbaurin, 20, à Versailles.

POINCARÉ, ingénieur des Mines, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 66, à Paris,
POKORNY (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
POLIGNAC (prince C. DE), rue Miroménil, 44, à Paris, S. P.
POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers.
PRESLES (DE), sous-intendant militaire, rue de Bellechasse, 29, à Paris.
PRICE (Bartholoméo), professeur à l'Université, à Oxford (Angleterre).
PUTZ (le général), commandant l'École d'application de l'Artillerie et du Génie, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
RAFFY, agrégé-préparateur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
RANCY (DE), directeur général de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, rue de Châteaudun, 44, à Paris.
REINACH (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
REY (Casimir), professeur à l'École régimentaire du Génie, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
RIBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Aix (Bouches-du-Rhône).
RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon.
RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, rue de Rennes, 66, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
ROUCHÉ (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, boulevard Pereire, 124, à Paris.
ROUX, architecte, rue de l'Arcade, 25, à Paris.
SAINT-PAUL (DUCUP DE), capitaine au 36e régiment d'Artillerie, à Clermont-Ferrand.
SARRAU, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
SCHLEGEL (Dr Victor), à Waren (Allemagne).
SCHOUTE, professeur à Groningue (Hollande).
SCHUBERT, professeur, Steindam, 89, à Hambourg (Allemagne).
SÉGUY, rue Pascal, 2, à Paris.
SÉLIVANOFF, attaché à l'Université, à Saint-Pétersbourg.
SIMART, lieutenant de vaisseau, examinateur d'admission à l'École navale, rue de Miroménil, 70, à Paris.
SONINE (Nicolas), professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, rue Forgowaja, 49, à Odessa (Russie).
STEPHANOS (Dr Cyparissos), rue de l'Arbalète, 28, à Paris.
STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
SYLOW, professeur à l'Université, Frederikshald (Norwège, S. V.).
TANNERY (Paul), ingénieur du service de l'expertise à la Manufacture des Tabacs, à Paris, S. P.
TANNERY, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Saint-Michel, 141, à Paris.
TARRY (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Pétersbourg.
TERRIER, professeur de Mathématiques, rue Monsieur-le-Prince, 18, à Paris.
TISSOT, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
TRESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Saumur (Maine-et-Loire).
VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
VAŇEČEK (J.-S.), professeur au lycée, à Jičín (Bohême).
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 26, à Paris.

VICAIRE, ingénieur des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
VIELLARD, manufacturier, aux forges de Morvillars (territoire de Belfort).
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée, à Alger.
WALCKENAER, ingénieur des Mines, à Pau (Basses-Pyrénées).
WEILL, professeur de Mathématiques, rue de Rome, 14, à Paris.
WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Maria-Theresia-Strasse, 10, à Obermeidling, près Vienne (Autriche).
WILSON, député, au palais de l'Élysée, à Paris.
WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des Mines, rue de Balzac, 7, à Paris.
ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Pétersbourg.
ZELLER (Charles), recteur du séminaire, à Markgrœningen (Wurtemberg).
ZEUTHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BISCHOFFSHEIM, banquier.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, capitaine du Génie.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur.
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
PEROTT (Joseph).
POLIGNAC (prince C. DE).
SYLOW, professeur à l'Université, Frederishald.
TANNERY (Paul), ingénieur des manufactures de l'État.

Modifications survenues depuis le 1er janvier 1883.

DÉCÉDÉS.

BRÉGUET, membre de l'Institut.
GASCHEAU, professeur de Faculté honoraire.
GOURNERIE (DE LA), membre de l'Institut,
OUANG-KING-TOLAN, mandarin.
PUISEUX, membre de l'Institut.
SIVERING, ingénieur en chef des travaux publics luxembourgeois.
SMITH, professeur à l'Université d'Oxford.

DÉMISSIONNAIRES.

CHEYSSON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

NOUVEAUX MEMBRES.

DERUYTS, docteur ès sciences.
FLEUREAU, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées.
OUANG-KING-TOUAN, mandarin.
PELLETREAU, ingénieur des Ponts et Chaussées.
RAFFY, agrégé préparateur à l'École Normale supérieure.
SYLOW, professeur à l'Université de Christiania.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
Académie des Sciences de Berlin.
Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
Academie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
Académie des Arts et des Sciences du Connecticut (Etats-Unis d'Amérique).
Académie des Sciences de Munich.
Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.
Académie des Sciences de Paris.
Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.
Académie des Sciences de Prague.
Académie Royale des *Lincei*, à Rome.
Académie Impériale des Sciences de Vienne.
Acta Mathematica (rédacteur M. Mittag-Leffler, à Stockholm).
American Journal of Mathematics, publié par l'Université de John Hopkins, à Baltimore (rédacteur M. Thomas Cray, à Baltimore).
Annali di Matematica (rédacteur M. Brioschi, à Milan).
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (rédacteurs MM. S. Lie et W. Muller, à Christiania).
Archiv für Mathematik und Physik (rédacteur Dr Hoppe, Lindestrasse, 89, à Berlin, S. W.
Zeitschrift für Mathematik und Physik (rédacteur Dr Oscar Schlömilch, à Dresde).
Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.
Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques (rédacteur M. Darboux).
Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky (rédacteur M. Edward Weyr, à Prague).
École Royale Normale supérieure de Pise.
Giornale di Matematiche (rédacteur M. Battaglini, à Rome).
Institut Royal de Luxembourg.
Institut Royal lombard des Sciences et Lettres, à Milan.
Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts, à Venise.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (rédacteur M. Carl Ohrtmann, à Berlin).
Jornal de Sciencias Matematicas e Astronomicas (rédacteur M. Gomes Teixeira, à Coïmbre).
Journal de l'École Polytechnique.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, à Berlin.
Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Leipzig).
Mathesis (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).
Réunion des officiers, à Lille.
Société mathématique d'Amsterdam.
Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.
Société philosophique de Cambridge.
Société Royale d'Édimbourg.

Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.
Société Royale des Sciences de Goettingue.
Société mathématique de Hambourg.
Société hollandaise des Sciences, à Harlem (Hollande).
Société mathématique de Kharkoff (Russie).
Société astronomique de Londres.
Société mathématique de Londres.
Société Royale de Londres.
Société mathématique de Moscou.
Société mathématique d'Odessa (Russie).
Société philomathique de Paris.
Société mathématique de Prague.
Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.
Société Royale des Sciences d'Upsal (Suède).
Société des Sciences naturelles de Zurich.
Université Royale de Pise.
Tidsskrift for Mathematik (rédacteur M. Zeuthen, à Copenhague).
Tijdschrift voor Vormleer, rekenkunde en de beginselen der Viskunde (rédacteur M. Versluys, à Amsterdam).

STATUTS DE LA SOCIÉTÉ.

Article premier. — La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

Art. 2. — Aucune communication ou discussion ne peut avoir lieu sur des objets étrangers aux Mathématiques.

Art. 3. — La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Art. 4. — Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont les suivantes : 1° être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée; 2° obtenir à l'une des séances suivantes les suffrages de la majorité des membres présents.

Art. 5. — Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Art. 6. — L'administration de la Société est confiée à un conseil composé :

1° Des membres du bureau;

2° De douze autres membres résidents de la Société désignés par l'élection;

3° De quatre membres non résidents désignés par l'élection; ils auront voix délibérative dans le conseil lors de leur présence à Paris.

Art. 7. — Le conseil est présidé par le président de la Société.

Art. 8. — Le bureau est composé de :

1 président;
4 vice-présidents;
2 secrétaires;
2 vice-secrétaires;
1 trésorier;
1 archiviste.

Art. 9. — Le président est élu pour un an.

Les vice-présidents sont nommés pour deux ans.

Deux d'entre eux sont remplacés chaque année.

Les secrétaires et les vice-secrétaires sont élus pour deux ans.

Le trésorier et l'archiviste pour trois ans.

Art. 10. — Le président n'est pas rééligible immédiatement dans les mêmes fonctions.

Art. 11. — Parmi les douze membres du conseil qui résident à Paris et qui ne font pas partie du bureau, quatre sont remplacés chaque année à tour de rôle.

Art. 12. — Tous les membres de la Société sont appelés à participer à l'élection du président, soit directement, soit par correspondance.

Art. 13. — Les autres membres du bureau et les membres du conseil sont élus à la majorité absolue des membres présents.

Art. 14. — Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

Art. 15. — La Société règle annuellement le budget de ses dépenses.

Dans la première séance de chaque année, le compte détaillé des recettes et dépenses de l'année révolue sera soumis à l'approbation de la Société; ce compte rendu sera publié dans le *Bulletin*.

RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

CHAPITRE PREMIER.

CONDITIONS D'ADMISSION.

1. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont :

1° D'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée;

2° D'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents (art. 4 des statuts).

2. Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

CHAPITRE II.

TRAVAUX ET PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ.

Tenue des séances.

3. La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

4. La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le remplacement des membres sortants du bureau et du conseil.

5. Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Les membres sont convoqués à domicile pour les séances extraordinaires.

6. Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

7. La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le bureau à chaque séance.

8. En cas d'absence du président ou des vice-présidents, le trésorier, ou à son défaut l'archiviste, occupe le fauteuil.

En cas d'absence de tous les membres du bureau, les fonctions du président sont remplies par le plus âgé des membres du conseil présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour désigne un des membres du conseil pour en remplir les fonctions.

9. Les procès-verbaux des séances sont rédigés dans l'intervalle d'une séance à l'autre.

Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente et de l'ordre du jour.

10. Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription; les communications des personnes étran-

gères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

Les membres qui auront fait des communications verbales ou pris part aux discussions devront remettre des notes au secrétaire pour la rédaction du procès-verbal.

11. Dans les séances ordinaires, on ne peut traiter aucune question relative à l'administration, à moins d'une demande du conseil.

12. Toutes les observations relatives à l'administration sont adressées par écrit au président, qui en réfère au conseil, à sa plus prochaine réunion.

Bulletin.

13. La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique,* qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

14. Les conventions stipulées entre le conseil de la Société et les éditeurs chargés de la publication du *Bulletin* devront être soumises à l'approbation de la Société.

Réimpression des ouvrages anciens et publication des mémoires originaux.

15. La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

La Société se réserve la faculté de publier les mémoires originaux trop étendus pour paraître dans le *Bulletin.*

16. Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin,* sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

CHAPITRE III.

ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ.

17. Chaque élection a lieu au scrutin secret, sur un seul bulletin, et, s'il est nécessaire, au moyen de deux tours, dont le second est de ballottage. Dans le cas d'égalité de voix, le plus âgé l'emporte.

18. L'élection du président seule donne lieu au vote de tous les membres résidents ou non résidents. Tout membre qui ne peut assister à la réunion

électorale est invité à envoyer au secrétaire, avant la première séance de janvier, son suffrage individuel dans un bulletin cacheté et enfermé dans une lettre signée de lui.

Ce bulletin ne peut être ouvert qu'au moment du dépouillement du scrutin.

19. Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du conseil.

20. Une commission d'impression, composée des secrétaires et de quatre membres nommés par le conseil, dirige la publication du *Bulletin* et l'impression des mémoires et communications.

21. Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société autres que les affaires de finances : ils convoquent la Société, le conseil et les commissions quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

22. La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et les recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

23. L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société; il en dresse un inventaire.

Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres et brochures imprimés, et tient un registre des manuscrits envoyés.

Enfin, il a sous sa garde tous les documents appartenant à la Société.

24. Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société.

25. Il tient un registre des recettes et des dépenses, que tous les membres ont le droit de consulter.

26. Le trésorier ne peut faire aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société sans une délibération spéciale du conseil.

Conseil et commissions.

27. Le président convoque le conseil toutes les fois que les affaires de la Société le réclament.

28. Il suffit d'une demande motivée, signée par cinq membres du conseil et adressée au président, pour qu'une convocation du conseil soit obligatoire.

29. A chaque séance du conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

30. Il faut au moins sept membres présents pour prendre des décisions en conseil.



31. Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

32. Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix au sein du conseil.

33. Les procès-verbaux des séances du conseil doivent être transcrits sur un registre coté et parafé par le secrétaire; il doivent être signés par le président et le secrétaire qui a tenu la plume; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

34. Le conseil se réunit dans la dernière quinzaine de décembre pour examiner l'état des affaires de la Société, nommer la commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier, et la commission des archives chargée de vérifier celle de l'archiviste.

35. Ces deux commissions ne peuvent être composées de moins de trois membres; elles font leur rapport dans la première séance de janvier.

36. Le conseil désigne annuellement, à la même époque, les membres qui, adjoints aux deux secrétaires, composent la commission permanente d'impression pour la publication du *Bulletin* et l'insertion des notes et mémoires des membres de la Société.

Cette commission veille à ce qu'il ne s'introduise dans les publications rien d'étranger à la Science.

37. Les membres élus de la commission d'impression sont nommés pour trois ans.

Les membres de la commission d'impression peuvent être pris indistinctement dans la Société ou dans le conseil.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS, REVENUS ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ.

38. Les versements des membres résidents et non résidents se composent :

1° Du droit d'admission, montant à 10 francs;

2° De la cotisation annuelle.

39. Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

40. Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

41. Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

42. Tout membre qui n'aura pas acquitté la cotisation d'une année sera, après avertissement préalable du trésorier, considéré comme démissionnaire.

43. La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel.*

44. Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin des séances* avec le nom des donateurs.

45. Les dépenses sont divisées en ordinaires et extraordinaires.

Les dépenses ordinaires se composent de frais de bureau et d'imprimés, ports de lettres, frais d'entretien, loyer du local, appointements des employés et frais d'impression du *Bulletin.* Le chiffre des dépenses ordinaires ne peut excéder les $\frac{9}{10}$ des ressources annuelles.

Les dépenses extraordinaires sont votées par la Société sur la proposition du conseil.

46. La Société ne s'engage jamais dans aucune dépense excédant son avoir.

CHAPITRE V.

REVISION DES STATUTS CONSTITUTIFS OU DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

47. Toute proposition de revision des statuts constitutifs ou du règlement administratif ne pourra être prise en considération que si elle est signée collectivement par vingt membres.

48. Le président fera, dans ce cas, procéder à un scrutin pour la nomination d'une commission de revision, qui sera composée de quatre membres du conseil et de trois membres pris en dehors.

49. La discussion du projet exigera la présence de la moitié plus un des membres résidant à Paris.

Tous les membres sont convoqués par lettres spéciales.

50. Si le nombre ci-dessus n'est pas atteint, la discussion aura lieu dans la séance suivante, quel que soit le nombre des membres présents.



AVIS.

La Rédaction a l'honneur de prévenir MM. les Auteurs que le Conseil de la Société mathématique, dans sa séance du 16 décembre 1881, a pris les décisions suivantes :

1° *La Société prendra à sa charge la moitié de la dépense des tirages à part d'auteur, pour cinquante exemplaires et au-dessous.*

2° *Pour plus de cinquante exemplaires, la Société payera la moitié du prix de cinquante exemplaires, au tarif fixé pour le tirage à cinquante exemplaires.*

Il résulte de là que les auteurs auront à débourser les sommes suivantes :

NOMBRE DES EXEMPLAIRES.	25.	50.	100.	200.	300.	400.	500.	1000.
Pour $^1/_4$ feuille	3,65	4,25	6,75	13,25	19,75	26,25	32,75	65,25
» $^1/_2$ »	4,15	5,00	8,50	16,00	23,50	31,00	38,50	76,00
» $^3/_4$ »	6,15	7,25	11,25	20,75	30,25	39,75	49,25	96,75
» 1 »	6,90	8,25	12,75	23,75	34,75	45,75	56,75	111,75

dont ils seront facturés directement par l'imprimerie Gauthier-Villars.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur l'évaluation graphique des moments et des moments d'inertie des aires planes; par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 21 décembre 1883.)

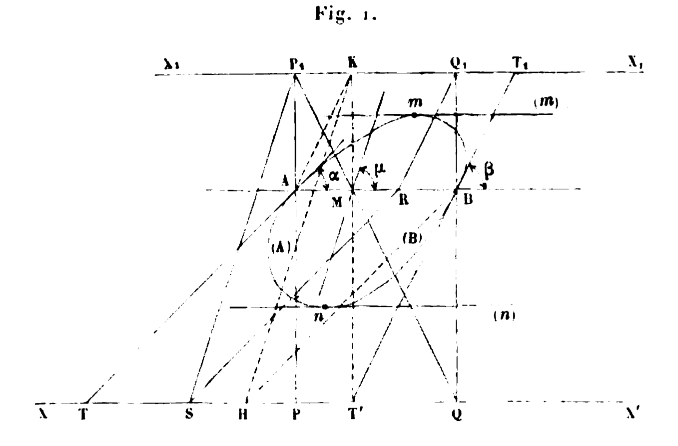
1. M. Collignon a fait connaître au Congrès tenu à Lille en 1874, par l'Association française pour l'avancement des Sciences, une ingénieuse méthode graphique, qui permet d'obtenir, par une simple évaluation de surface, le moment, ou le moment d'inertie d'une aire plane quelconque par rapport à un axe donné dans son plan. Cela revient, au point de vue analytique, à trouver, au moyen d'une simple quadrature, la valeur de l'intégrale $\int xy\,dy$, ou de l'intégrale $\int xy^2\,dy$ prise le long d'un contour donné; la méthode se généralise pour l'intégrale $\int xy^m dy$, où m est un nombre entier et positif.

2. Voici quelle est cette méthode : Comprenons le contour qui limite l'aire donnée entre deux parallèles à l'axe donné XX'; nous déterminons ainsi sur ce contour deux points m et n, qui divisent le contour en deux branches (A) et (B). Menons à XX' une parallèle $X_1X'_1$ quelconque, mais extérieure au contour donné, et désignons par a la distance de ces deux droites.

Soit maintenant AB une corde parallèle à XX′, et dont les distances à XX′ et à $X_1X'_1$ sont y et y_1 ; prenons sur AB le point M, tel que $\frac{AM}{BM}=\frac{y_1}{y}$; le point M, quand AB varie en restant parallèle à XX′, engendre une courbe (M), qui va du point n au point m; la surface comprise entre (M) et (B), multipliée par a, donne le moment de l'aire considérée par rapport à XX′.

Si la courbe (M_1) est déduite de (M) et de (B), comme (M) l'a été de (A) et de (B), la surface comprise entre (M_1) et (B), multipliée par a^2, donne le moment d'inertie de l'air considéré par rapport à XX′. Déduisant, toujours par le même procédé, la courbe (M_2) des courbes (M_1) et (B), on obtient une surface qui,

Fig. 1.



multipliée par a^3, donne la valeur de l'intégrale $\int xy^3\,dy$, prise le long du contour donné, et ainsi de suite. Chacune des courbes (M_1), (M_2), (M_3), ... dérive donc de la précédente et de la courbe (B), comme (M) dérive de (A) et de (B); il nous suffit dès lors de considérer cette courbe (M).

3. La valeur d'un procédé graphique dépendant du plus ou moins de précision que l'on peut apporter à son exécution, on doit s'attacher à déterminer la courbe (M) avec toute l'exactitude désirable. Aussi est-il intéressant de pouvoir obtenir, en même temps que chaque point de cette courbe, la tangente en ce point. Tel est le but de la présente Note; nous donnerons aussi, mais

alors à simple titre de propriété géométrique, la détermination du rayon de courbure.

4. Prenons une position de la corde AB; par les points A et B, menons à XX′ les perpendiculaires PP_1 et QQ_1; tirons P_1Q; cette droite coupe AB au point correspondant M de la courbe (M).

Appelons

a la distance PP_1 ou QQ_1 de XX′ et $X_1X'_1$;
y la distance AP ou BQ de XX′ et AB;
y_1 la distance AP_1 ou BQ_1 de $X_1X'_1$ et AB;
X la longueur AB;
x_1 la longueur AM;
α l'angle que la tangente en A à la courbe (A) fait avec XX′;
β l'angle que la tangente en B à la courbe (B) fait avec XX′;
μ l'angle que la tangente en M à la courbe (M) fait avec XX′.

Nous avons, par définition,

$$\frac{x_1}{X} = \frac{y_1}{a} = \frac{a-y}{a};$$

donc

$$a x_1 = X(a-y).$$

Différentions cette expression; il vient

$$a\,dx_1 = dX(a-y) - X\,dy.$$

Soient $d(A)$, $d(B)$ et $d(M)$ les arcs infiniment petits décrits par les points A, B et M, lorsque y s'accroît de dy; nous avons

$$dx_1 = d(M)\cos\mu - d(A)\cos\alpha = dy(\cot\mu - \cot\alpha),$$
$$dX = d(B)\cos\beta - d(A)\cos\alpha = dy(\cot\beta - \cot\alpha).$$

L'égalité précédente devient alors, en divisant par dy,

$$a(\cot\mu - \cot\alpha) = (a-y)(\cot\beta - \cot\alpha) - X$$

ou

$$a\cot\mu = y_1\cot\beta + y\cot\alpha - X. \tag{1}$$

Cette formule est générale, pourvu que les angles α, β et μ soient tous trois comptés dans le sens direct. Cherchons son interprétation géométrique, dans le cas de la figure actuelle; elle donne,

en supposant P_1S parallèle à la tangente en M à la courbe (M),

$$PS = Q_1T_1 + TP - AB.$$

Menons Q_1R parallèle à BT_1; nous avons

$$PS = TP - (AB - Q_1T_1) = TP - (AB - BR) = TP - AR;$$

par suite,

$$AR = TS,$$

et SR est parallèle à AT. Donc :

En menant Q_1R *parallèle à la tangente en* B, *puis* RS *parallèle à la tangente en* A, *et en tirant* PS, *on a la direction de la tangente en* M.

5. Cette construction est générale et indépendante de la disposition de la figure. Le problème se trouve donc ainsi résolu très simplement. Mais nous devons à l'obligeance de M. Collignon une remarque qui permet de simplifier encore la solution, en rendant inutiles les perpendiculaires PP_1 et QQ_1 à XX', et en faisant reposer la construction sur l'emploi exclusif des tangentes AT et BT; cette remarque peut se formuler ainsi : si l'on déplace la figure Q_1RSP_1 de la quantité Q_1T_1 parallèlement à XX', le point Q_1 vient en T_1, le point R en B, le point S en H, BH étant parallèle à AT, et le point P_1 en K, AK étant parallèle à BT_1.

Dès lors la construction de la courbe (M), point par point, avec ses tangentes, pourra s'effectuer par le procédé bien simple qui suit :

Pour une position de la corde AB, *prendre les tangentes* AT *et* BT'; *mener* AK, *parallèle à* BT', *jusqu'à* $X_1X'_1$, *et* BH, *parallèle à* AT, *jusqu'à* XX'; *tirer* KT' *qui donne le point* M *et* KH *qui donne la direction de la tangente à la courbe* (M) *en ce point.*

6. Voyons maintenant ce qui a lieu aux points limites m et n; nous appellerons les parallèles (m) et (n), menées par ces points à XX', les *droites limites*. Rien ne distinguant géométriquement l'une de ces droites de l'autre, il nous suffit d'en prendre une, (m) par exemple.

Il y a trois cas à considérer :

1° La droite (m) se confond sur une certaine longueur avec le contour, c'est-à-dire que l'aire est en partie limitée par une droite parallèle à XX'; dans ce cas, rien ne distingue la corde (m) d'une corde AB quelconque, et l'on peut appliquer l'une ou l'autre des constructions précédentes.

2° La droite (m) rencontre le contour en un seul point, mais sans être tangente à ce contour, c'est-à-dire le coupe en un point anguleux. Il y a alors au point m deux tangentes au contour, l'une pour la branche (A), l'autre pour la branche (B); en appliquant alors la seconde construction, on est conduit à la règle suivante :

Prendre le point de rencontre de la tangente à la branche (A) *avec* XX' *et le point de rencontre de la tangente à la branche* (B) *avec* $X_1X'_1$; *joindre ces deux points.*

On a ainsi la direction de la tangente à la courbe (M) au point m.

3° La droite (m) touche le contour au point m; appliquons dans ce cas la première construction; les droites PP_1 et QQ_1 se confondent; le point R devient le point à l'infini sur AB; le point S, le point à l'infini sur OX'; la droite P_1S se confond alors avec $X_1X'_1$; donc *la tangente en* m *à la courbe* (M) *est parallèle à* XX'.

7. Nous pouvons, non pas en vue de la détermination graphique de la courbe (M), mais à titre de recherche géométrique, nous proposer de trouver la relation qui existe entre le rayon de courbure R_M de la courbe (M) au point M et les rayons de courbure R_A et R_B du contour aux points A et B. A cet effet, différentions l'équation (1); cela nous donne

$$-\frac{a\,d\mu}{\sin^2\mu} = dy_1 \cot\beta - \frac{y_1\,d\beta}{\sin^2\beta} + dy\cot\alpha - \frac{y\,d\alpha}{\sin^2\alpha} - dX.$$

Appelant toujours $d(M)$, $d(A)$, $d(B)$ les arcs infiniment petits décrits par les points M, A, B, nous avons

$$d\mu = \frac{d(M)}{R_M} = \frac{dy}{R_M \sin\mu},$$

et de même

$$d\alpha = \frac{dy}{R_A \sin \alpha}, \quad d\beta = \frac{dy}{R_B \sin \beta};$$

maintenant

$$dy_1 = -dy$$

et, comme nous l'avons déjà vu,

$$dX = dy(\cot \beta - \cot \alpha).$$

Faisant toutes ces substitutions dans la formule différentielle écrite plus haut, et divisant par dy, nous avons

$$-\frac{a}{R_M \sin^3 \mu} = -\cot \beta - \frac{y_1}{R_B \sin^3 \beta} + \cot \alpha - \frac{y}{R_A \sin^3 \alpha} - (\cot \beta - \cot \alpha)$$

ou

$$\frac{a}{R_M \sin^3 \mu} = \frac{y}{R_A \sin^3 \alpha} + \frac{y_1}{R_B \sin^3 \beta} + 2(\cot \alpha - \cot \beta);$$

le rayon de courbure R_M est ainsi déterminé en fonction de quantités toutes connues.

Si (A) et (B) sont des droites, R_A et R_B sont infinis, et la formule se réduit à

$$\frac{a}{R_M \sin^3 \mu} = 2(\cot \beta - \cot \alpha),$$

c'est-à-dire

$$R_M \sin^3 \mu = \text{const.}$$

Et, en effet, la courbe (M) est dans ce cas une parabole dont l'axe est parallèle à XX'; or on sait que, pour une telle courbe, $R_M \sin^3 \mu$ est constant.

Si les droites sont parallèles, $\alpha = \beta$; alors R_M est infini et la courbe (M) est une droite, ce qui était évident, *a priori*.

Étude géométrique de la distribution des efforts autour d'un point dans une poutre rectangulaire et dans un massif de terre; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 18 janvier 1884.)

Poutre rectangulaire.

Il s'agit ici d'une poutre droite, à section rectangulaire, soumise à des efforts diversement inclinés sur son axe, mais tous parallèles à son plan moyen.

Soient, en un point quelconque de la poutre,

R la compression longitudinale :
S l'effort tangentiel sur la section normale ;
φ l'angle que fait avec l'axe de la pièce un plan perpendiculaire au plan moyen et mené arbitrairement par le point considéré ;
X la pression normale sur ce plan au point considéré ;
Y l'effort tangentiel le long de ce plan au même point.

Les forces R, S, X, Y sont rapportées à l'unité de surface.

On sait que l'on a entre ces diverses quantités les deux relations

$$X = S\sin 2\varphi + \frac{R}{2}(1 - \cos 2\varphi), \tag{1}$$

$$Y = S\cos 2\varphi + \frac{R}{2}\sin 2\varphi, \tag{2}$$

qui font connaître X et Y pour toute valeur de φ.

Nous avons trouvé une construction géométrique bien simple de X et de Y, qui met en évidence la loi de distribution de ces efforts autour du point considéré et conduit à des remarques nouvelles, relativement à cette distribution. M. l'Ingénieur en chef Collignon nous a fait l'honneur d'exposer ce mode de représentation dans son Cours de Résistance des matériaux à l'École des Ponts et Chaussées. Nous allons le développer dans cette Note.

Supposons que l'on prenne le point M, dont les coordonnées sont X et Y. Pour avoir le lieu de ce point, éliminons l'angle φ entre les deux équations (1) et (2). A cet effet, écrivons la première de ces équations

$$(1') \qquad \frac{R}{2} - X = - S \sin 2\varphi + \frac{R}{2}\cos 2\varphi,$$

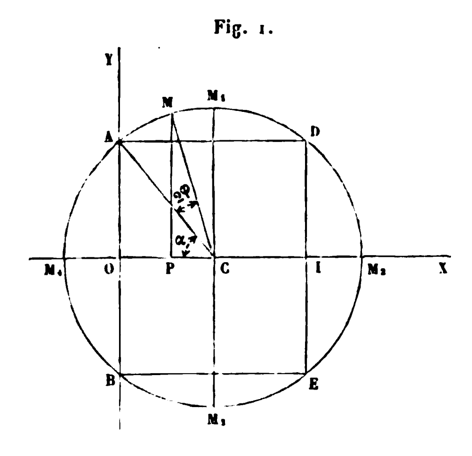
et ajoutons son carré au carré de (2); cela donne

$$\left(\frac{R}{2} - X\right)^2 + Y^2 = S^2 + \frac{R^2}{4},$$

équation d'un cercle dont le centre est sur OX à une distance de l'origine $OC = \frac{R}{2}$ et qui coupe l'axe OY aux points A et B, tels que $OA = OB = S$.

Pour déterminer sur ce cercle la position du point M, correspondant à une valeur donnée de φ, divisons (2) par (1'); cela nous donne

Fig. 1.



$$\frac{Y}{\frac{R}{2} - X} = \frac{S\cos 2\varphi + \frac{R}{2}\sin 2\varphi}{\frac{R}{2}\cos 2\varphi - S\sin 2\varphi}.$$

Remarquant que $Y = MP$, $\frac{R}{2} - X = PC$, et $\frac{S}{\frac{R}{2}} = \tan g\alpha$, α étant

l'angle ACO, on tire de l'équation précédente

$$\frac{MP}{PC} = \operatorname{tang}(\alpha + 2\varphi);$$

par suite,

$$\widehat{MCP} = \alpha + 2\varphi$$

et

$$\widehat{MCA} = 2\varphi.$$

De ce qui précède, résulte la construction suivante :

Formons le rectangle ABED *ayant pour côtés* AD = R *et* AB = 2S, *et traçons le cercle circonscrit à ce rectangle; puis tirons le rayon* AC, *et la médiane* OI, *qui joint les milieux des côtés opposés* AB *et* DE; *cela fait, menons par le centre* C *une droite* CM *faisant avec le rayon* AC *un angle* ACM *égal à* 2φ, *et abaissons du point* M, *où cette droite coupe le cercle circonscrit, la perpendiculaire* MP *sur* OI; OP *est égal à* X *et* MP *à* Y.

On se rend ainsi compte, par la seule inspection de la figure, de la distribution des efforts autour du point considéré, c'est-à-dire des variations simultanées de X et de Y quand φ varie de zéro à π.

Nous poserons $S^2 + \frac{R^2}{4} = r^2$ et nous appellerons, dans ce qui suit, r le *rayon de distribution,* α l'*angle de distribution* pour le point considéré.

Faisons varier le point M sur le cercle, à partir du point A ([1]).

Au point A, $\varphi = 0$, $Y = S$, $X = 0$.

Au point M_1, Y *est maximum,* et l'on a $Y = r$, $X = \frac{R}{2}$; quant à l'angle φ, il est déterminé par $2\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Au point D, $Y = S$, $X = R$ et l'angle φ est donné par $2\varphi = \pi - 2\alpha$. Donc, *pour le plan dont l'inclinaison sur l'axe est le complément de l'angle de distribution, l'effort tangentiel est égal à*

([1]) Il est bien entendu que, lorsque nous parlons, dans la suite, des efforts exercés sur divers plans, nous ne considérons que les efforts pris sur ces plans au point considéré dans la poutre.

l'effort tangentiel dans la section normale, et la pression normale est égale à la compression longitudinale.

Au point M_2, X *est maximum;* on a $Y = o$, $X = R + r$ et $2\varphi = \pi - \alpha$.

Au point E, $Y = -S$, $X = R$, $2\varphi = \pi$, ce qu'on savait *a priori.*

Au point M_3, Y *a, en valeur absolue, un maximum;* on a $Y = -r$, $X = \frac{R}{2}$, $2\varphi = \frac{3\pi}{2} - \alpha$.

Au point B, $Y = -S$, $X = o$, $2\varphi = 2\pi - 2\alpha$ ou $\varphi = \pi - \alpha$.

Du point B au point A, c'est-à-dire pour φ variant de $\pi - \alpha$ à π, X est négatif; il y a, par suite, extension au lieu de compression.

Enfin, au point M_4, X *a, en valeur absolue, un maximum,* et l'on a $Y = o$, $X = -\left(r - \frac{R}{2}\right)$, $2\varphi = 2\pi - \alpha$.

En somme, le maximum absolu de X a lieu en M_2 et répond à une compression; en M_4, ce n'est qu'un maximum relatif, répondant à une extension.

On voit qu'à deux positions du point M symétriques, par rapport à Ox, correspondent la même pression normale et des efforts tangentiels égaux et de signes contraires; or, si φ et φ' sont les inclinaisons correspondantes, on a $2\varphi + 2\varphi' = 2\widehat{ACI} = 2(\pi - \alpha)$, ou $\varphi + \varphi' = \pi - \alpha$; d'où cette propriété :

Pour deux plans dont la somme des inclinaisons sur l'axe est égale au supplément de l'angle de distribution, les pressions normales sont les mêmes et les efforts tangentiels sont égaux et de signes contraires.

Prenons maintenant deux positions du point M, symétriques par rapport à $M_1 M_3$; nous voyons alors que, *pour deux plans dont la somme des inclinaisons sur l'axe est égale au complément de l'angle de distribution, les efforts tangentiels sont les mêmes et la somme des pressions normales est égale à la compression longitudinale.*

A une valeur donnée du rayon de distribution répondent une infinité de points dans la poutre; prenons deux quelconques de ces points Z et Z'; la valeur commune de leurs rayons de distribution sera r, leurs angles de distribution seront α et α', les compressions longitudinales en ces points R et R'.

Nous aurons les distributions relatives à ces deux points en inscrivant dans le cercle de rayon r, deux rectangles ayant mêmes médianes, et dont les bases seront respectivement R et R′. Prenons un point M quelconque sur le cercle circonscrit; ce point M détermine pour le point Z, X, Y et φ, et pour le point Z′, X′, Y′ et φ'; de plus la figure montre que

$$2\varphi + \alpha = 2\varphi' + \alpha' \quad \text{ou} \quad \varphi' = \varphi + \frac{\alpha - \alpha'}{2},$$

$$Y' = Y$$

et

$$X' = X + \frac{R' - R}{2}.$$

On peut donner une interprétation très simple de ces formules à l'aide des considérations suivantes :

Prenons, en un point Z quelconque de la poutre, un plan incliné de l'angle φ sur l'axe de la pièce, et marquons, pour ce point, l'effort tangentiel $ZT = Y$ et la pression normale $ZN = X$; quand on fera varier l'angle φ, le point T décrira une courbe que nous appellerons *courbe des efforts tangentiels* et le point N une courbe qui sera dite *courbe des pressions normales.*

Ces définitions étant posées, les formules précédentes conduiront à l'énoncé suivant :

Considérons, au point Z, la courbe des efforts tangentiels et la courbe des pressions normales; laissant la première intacte, augmentons tous les vecteurs de la seconde de la quantité constante $\frac{R' - R}{2}$; *puis, faisons tourner toute la figure de l'angle* $\frac{\alpha - \alpha'}{2}$ *dans le sens où se comptent les angles* φ *et transportons-la parallèlement à elle-même au point Z′; nous aurons ainsi les deux courbes d'efforts relatives à ce dernier point.*

Donc, en tous les points où le rayon de distribution a une même valeur donnée, la courbe des efforts tangentiels est la même, à l'orientation près, et la courbe des pressions normales est la même, à l'orientation et à une constante près, ajoutée à tous les vecteurs.

Massif de terre.

Soient, en un point quelconque d'un massif de terre sans cohésion, indéfini en un sens :

N_1 et N_2 les pressions normales qui s'exercent sur deux plans rectangulaires se coupant suivant une droite Δ parallèle à la direction indéfinie du massif et passant au point considéré;

T la pression tangentielle sur l'un de ces plans, qui est aussi la pression tangentielle sur l'autre;

φ l'angle que fait avec le premier de ces plans un plan quelconque passant par la droite Δ;

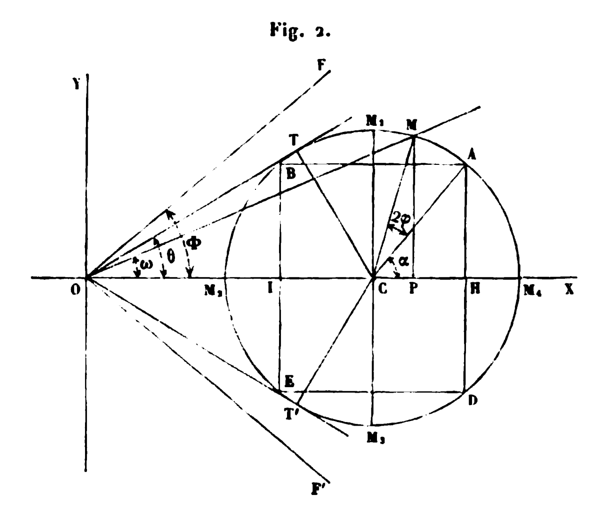
X la pression normale sur ce plan au point considéré;

Y la pression tangentielle sur ce plan au même point;

ω l'angle que fait avec la normale à ce plan la pression totale, résultante de X et de Y;

Φ l'angle de frottement des terres considérées.

Fig. 2.



Les équations d'équilibre données par M. Maurice Lévy, et qui s'obtiennent très aisément, sont

$$X = N_1 \cos^2\varphi + N_2 \sin^2\varphi - 2T \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$Y = (N_1 - N_2) \sin\varphi \cos\varphi + T(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

qu'on peut écrire

$$X - \frac{N_1 + N_2}{2} = \frac{N_1 - N_2}{2}\cos 2\varphi - T\sin 2\varphi,$$

$$Y = \frac{N_1 - N_2}{2}\sin 2\varphi + T\cos 2\varphi.$$

Comme précédemment, considérons le point M dont les coordonnées, comptées suivant des axes rectangulaires, sont X et Y. Le lieu décrit par ce point, lorsqu'on fait varier l'angle φ, a pour équation

$$\left(X - \frac{N_1 + N_2}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 + T^2;$$

c'est un cercle dont le centre C est sur l'axe OX, à une distance de l'origine $OC = \frac{N_1 + N_2}{2}$ et dont le rayon est

$$r = \sqrt{\left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 + T^2}.$$

Portons $CH = \frac{N_1 - N_2}{2}$, et sur la perpendiculaire élevée à OX par le point H, HA = T; AC sera égal à r.

Pour déterminer sur ce cercle la position du point M correspondant à une valeur donnée de l'angle φ, divisons les deux équations membre à membre,

$$\frac{Y}{X - \frac{N_1 + N_2}{2}} = \frac{\frac{N_1 - N_2}{2}\sin 2\varphi + T\cos 2\varphi}{\frac{N_1 - N_2}{2}\cos 2\varphi - T\sin 2\varphi}.$$

Remarquant que

$$Y = MP, \quad X - \frac{N_1 + N_2}{2} = PC$$

et

$$\frac{T}{\frac{N_1 - N_2}{2}} = \frac{AH}{HC} = \operatorname{tang}\alpha,$$

nous tirons de là

$$\frac{MP}{PC} = \operatorname{tang}(\alpha + 2\varphi);$$

d'où

$$\widehat{MCP} = \alpha + 2\varphi$$

et

$$\widehat{MCA} = 2\varphi.$$

Ainsi donc, pour une valeur quelconque de φ, il suffit de faire l'angle MCA égal à 2φ et d'abaisser la perpendiculaire MP sur OX; on a

$$MP = Y \quad \text{et} \quad OP = X.$$

Comme précédemment, nous appellerons le cercle ainsi tracé *cercle de distribution* au point considéré; *r* sera le *rayon de distribution,* α *l'angle de distribution,* O le *pôle de la distribution.*

Tirons OM; l'angle MOC est précisément l'angle ω. Pour que que le massif soit stable au point considéré, il faut que, pour aucune direction prise autour de ce point, l'angle ω n'atteigne la valeur de l'angle Φ du frottement. Traduisons géométriquement cette condition; tirons les droites OF et OF′ inclinées de l'angle Φ sur OX; il faut que les droites ainsi menées soient extérieures au cercle de distribution; on peut encore dire que l'angle θ que font avec OX les tangentes OT et OT′, menées du pôle au cercle de distribution, doit être inférieur à Φ. Le cas limite est celui où $\theta = \Phi$; les angles $\frac{ACT}{2}$ et $\frac{ACT'}{2}$ définissent alors les directions de glissement.

L'angle θ se calcule immédiatement par

$$\tang\theta = \frac{CT}{OT} = \sqrt{\frac{CT}{OC^2 - CT^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 + T^2}{\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 - T^2}} = \sqrt{\frac{(N_1 - N_2)^2 + 4T^2}{4N_1N_2 - 4T^2}}.$$

Les directions orthopiéziques, pour lesquelles $\omega = 0$, sont immédiatement fournies par les points M_2 et M_4, et l'on a, au point M_2,

$$2\varphi = \pi - \alpha;$$

au point M_4,

$$2\varphi = 2\pi - \alpha;$$

par suite, en chacun de ces points,

$$\tang 2\varphi = -\tang\alpha = -\frac{T}{\frac{N_1 - N_2}{2}}.$$

Remarquons en outre qu'au point M_4 a lieu le maximum de la

pression normale, et au point M_2 son minimum ; en M_4,

$$X = \frac{N_1 + N_2}{2} + r;$$

en M_2,

$$X = \frac{N_1 + N_2}{2} - r.$$

Les maxima de la pression tangentielle sont donnés par le point M_1, pour lequel

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

et par le point M_3, pour lequel

$$2\varphi = \frac{3\pi}{2} - \alpha;$$

en M_1,

$$X = \frac{N_1 + N_2}{2}, \quad Y = r;$$

en M_3,

$$X = \frac{N_1 + N_2}{2}, \quad Y = -r.$$

Prenant deux positions du point M symétriques par rapport au centre C, on a cette propriété :

Pour deux directions de plan rectangulaires, les pressions tangentielles sont égales et de signes contraires, et la somme des pressions normales est constante.

Prenons maintenant deux positions du point M symétriques par rapport à M_2M_4; nous avons :

Pour deux directions de plan dont la somme des inclinaisons sur le plan de comparaison est égale au supplément de l'angle de distribution, les pressions normales sont les mêmes et les pressions tangentielles sont égales et de signes contraires.

Enfin, considérant deux positions du point M symétriques par rapport à M_1M_3, on a :

Pour deux directions de plan dont la somme des inclinaisons sur le plan de comparaison est égale au complément de

l'angle de distribution les, pressions tangentielles sont les mêmes et la somme des pressions normales est constante.

On peut répéter la remarque qui a été faite plus haut, pour les points où le rayon de distribution a la même valeur.

Sur une transformation de l'équation différentielle linéaire d'un ordre quelconque; par M. David [1].

(Séance du 4 janvier 1884.)

M. Laguerre a démontré (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 117 et 225) les deux théorèmes bien remarquables qui suivent et que l'on peut énoncer ainsi :

1° L'équation différentielle linéaire du troisième ordre se ramène par des quadratures à une équation de la forme

$$\frac{d^3u}{dz^3} + 2\,F(z)\frac{du}{dz} + \left[F'(z) + \frac{1}{2}\right]u = 0;$$

2° Dans l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre, on peut faire disparaître le second et le troisième terme par des quadratures et par la résolution d'une équation linéaire du second ordre.

Il introduit dans son analyse une fonction des coefficients qu'il appelle avec raison *invariant*.

J'introduis un nouvel invariant qui permet de compléter, à certains égards, les théorèmes qui viennent d'être énoncés, particulièrement en ce qui concerne les équations du quatrième ordre.

I.

Je suppose que dans l'équation proposée on ait fait disparaître le second terme, ce qui se fait par de simples quadratures, comme

(1) Cette Note contient des résultats démontrés par M. Halphen dans un travail inédit couronné par l'Académie des Sciences, et qui m'est inconnu. Le Mémoire de M. Halphen ne pouvant paraître qu'à une époque relativement éloignée, elle présente peut-être encore quelque intérêt; d'ailleurs la marche que j'ai suivie est, paraît-il, différente.

on sait; et je représente en conséquence cette équation par

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^n y}{dx^n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{B}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mathrm{C}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\\ &\qquad +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\mathrm{E}\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}}+\ldots=0.\end{aligned}\right.$$

Je fais d'abord $y = uv$; d'où il résulte

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n u}{dx^n}v+\frac{n}{1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\frac{d^2 v}{dx^2}+\ldots;$$

et c'est dans $\frac{d^n u}{dx^n}$ que je remplace x par une fonction quelconque de z. Pour cela, j'emploie le théorème des fonctions de fonctions sous la forme

$$(2)\quad \frac{d^n u}{dx^n}=\frac{d^n u}{dz^n}\frac{a_1^n}{[n]}+\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}\mathrm{D}\frac{a_1^{n-1}}{[n-1]}+\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}}\mathrm{D}^2\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}+\ldots,$$

où l'on a mis pour abréviation $[n]$ au lieu de 1, 2, 3, ..., n. Mais cette formule demande quelques explications.

Soit, dans une expression donnée, un terme tel que

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}a_3^{p_3}a_4^{p_4}$$

par exemple, dans lequel les quantités a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent être appelées des quantités successives. La caractéristique D représente l'opération suivante :

$$\mathrm{D}a_1^{p_1}a_2^{p_2}a_3^{p_3}a_4^{p_4}=p_3 a_1^{p_1}a_2^{p_2}a_3^{p_3-1}\frac{a_4^{p_4+1}}{p_4+1}+p_4 a_1^{p_1}a_2^{p_2}a_3^{p_3}a_4^{p_4-1}a_5,$$

qui, ainsi qu'on le voit, ne porte que sur les deux dernières lettres. Dans le cas où l'avant-dernière lettre aurait un exposant égal à zéro, c'est-à-dire dans le cas où cette lettre manquerait, on serait conduit, pour le second terme du second membre, à un exposant négatif, et alors il faudrait supprimer ce terme. C'est la règle d'Arbogast. Une seconde opération est représentée par D^2, une troisième par D^3, et ainsi de suite. Les quantités désignées par $\mathrm{D}\frac{a_1^{n-1}}{[n-1]}$, $\mathrm{D}^2\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}$, $\mathrm{D}^3\frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}$, ... dans l'équation précédente sont ainsi bien définies et se déduisent successivement avec la plus

grande facilité les unes des autres. Si l'on suppose maintenant

$$(3)\qquad a_1 = \frac{dz}{dx}, \quad a_2 = \frac{d^2 z}{1.2\, dx^2}, \quad a_3 = \frac{d^3 z}{1.2.3\, dx^3}, \quad \ldots,$$

la formule (2) est celle du théorème des fonctions de fonctions (voir *Journal de Mathématiques*, p. 67; 1882). Pour la facilité des opérations qui vont suivre, j'ajoute les relations suivantes :

$$(4)\qquad 2a_2 = \frac{da_1}{dx}, \quad 3a_3 = \frac{da_2}{dx}, \quad 4a_4 = \frac{da_3}{dx}, \quad \ldots.$$

Cela posé, en employant la formule (2), je remplace l'équation proposée (1) par l'équation

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n u}{dz^n} v a_1^n + \frac{n}{1}\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}\left(\frac{dv}{dx}a_1^{n-1} + v\,\mathrm{D}a_1^{n-1}\right)\\
&\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}}\left[\frac{d^2v}{dx^2}a_1^{n-2} + 2\frac{dv}{dx}\mathrm{D}a_1^{n-2} + 1.2v\left(\mathrm{D}^2 a_1^{n-2} + \frac{\mathrm{B}}{1.2}a_1^{n-2}\right)\right]\\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{d^{n-3}u}{dz^{n-3}}\left[\frac{d^3v}{dx^3}a_1^{n-3} + 3\frac{d^2v}{dx^2}\mathrm{D}a_1^{n-3} + 2.3\frac{dv}{dx}\left(\mathrm{D}^2 a_1^{n-3} + \frac{\mathrm{B}}{1.2}a_1^{n-3}\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + 1.2.3v\left(\mathrm{D}^3 a_1^{n-3} + \frac{\mathrm{B}}{1.2}\mathrm{D}a_1^{n-3} + \frac{\mathrm{C}}{1.2.3}a_1^{n-3}\right)\right] + \ldots = 0,
\end{aligned}$$

laquelle devient, en développant les opérations représentées par la caractéristique D,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n u}{dz^n} v a_1^n + \frac{n}{1}\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}\left[\frac{dv}{dx}a_1^{n-1} + v(n-1)a_1^{n-1}a_2\right]\\
&\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-3}}\left\{\frac{d^2v}{dx^2}a_1^{n-2} + 2\frac{dv}{dx}(n-2)a_1^{n-3}a_2\right.\\
&\qquad\qquad \left. + 1.2v\left[(n-2)(n-3)a_1^{n-4}\frac{a_2^2}{1.2} + (n-2)a_1^{n-3}a_3 + \frac{\mathrm{B}}{1.2}a_1^{n-2}\right]\right\}\\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{d^{n-3}u}{dz^{n-3}}\left\{\frac{d^3v}{dx^3}a_1^{n-3} + 3\frac{d^2v}{dx^2}(n-3)a_1^{n-4}a_2\right.\\
&\qquad\qquad + 2.3\frac{dv}{dx}\left[(n-3)a_1^{n-5}\frac{a_2^2}{1.2} + (n-3)a_1^{n-4}a_3 + \frac{\mathrm{B}}{1.2}a_1^{n-3}\right]\\
&\qquad\qquad + 1.2.3v\left[(n-3)(n-4)(n-5)a_1^{n-6}\frac{a_2^3}{1.2.3}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad + (n-3)(n-4)a_1^{n-5}a_2a_3 + (n-3)a_1^{n-4}a_4\\
&\qquad\qquad\qquad \left.\left. + \mathrm{B}\frac{1}{1.2}(n-3)a_1^{n-4}a_2 + \frac{\mathrm{C}}{1.2.3}a_1^{n-3}\right]\right\} + \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Grâce à la règle d'Arbogast, je n'ai pas écrit le terme suivant, pour abréger, attendu qu'il s'écrit immédiatement à la suite du précé-

dent sans calcul et sans autre peine que celui de l'écrire ; mais je dois en faire usage dans ce qui suit, et il est nécessaire de le rétablir.

On fait disparaître le second terme de cette équation en posant

$$\frac{dv}{dx} = -v(n-1)\frac{a_2}{a_1};$$

il en résulte par la différentiation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\left[(n-1)(n+1)\frac{a_2^2}{a_1^2} - 3(n-1)\frac{1}{a_1}a_3\right],$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = v\left[-(n-1)(n+1)(n+3)\frac{1}{a_1^3}a_2^3 + 9(n-1)(n+1)\frac{1}{a_1^2}a_2a_3 - 12(n-1)\frac{1}{a_1}a_4\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4v}{dx^4} = v\Big[&(n-1)(n+1)(n+3)(n-5)\frac{1}{a_1^4}a_2^4 - 18(n-1)(n+1)(n+3)\frac{1}{a_1^3}a_2^2a_3 \\ &+ 48(n-1)(n+1)\frac{1}{a_1^2}a_2a_4 + 27(n-1)(n+1)\frac{1}{a_1^2}a_3^2 - 60(n-1)\frac{1}{a_1}a_5\Big].\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans l'équation transformée, elle devient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^nu}{dz^n} + \frac{n(n-1)}{1.2}B_0\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}C_0\frac{d^{n-3}u}{dz^{n-3}} \\ &\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}E_0\frac{d^{n-4}u}{dz^{n-4}} + \ldots = 0,\end{aligned}\right.$$

les coefficients B_0, C_0, E_0, ... étant déterminés par les relations suivantes, relativement très simples :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}B_0 &= \frac{n+1}{a_1^2}\left(\frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1} + \frac{B}{n+1}\right) = \frac{n+1}{3}a_1^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{d^2a_1^{-\frac{1}{2}}}{dx^2} + \frac{B}{n+1}a_1^{-\frac{1}{2}}\right), \\ C_0 &= \frac{n+1}{a_1^3}\left(-12\frac{a_2^3}{a_1^3} + 18\frac{a_2a_3}{a_1^2} - 6\frac{a_4}{a_1} - 6\frac{B}{n+1}\frac{a_2}{a_1} + \frac{C}{n+1}\right), \\ E_0 &= \frac{n+1}{a_1^4}\Big\{3(n+59)\frac{a_2^4}{a_1^4} - 6(n+59)\frac{a_2^2a_3}{a_1^4} + 3(n+23)\frac{a_3^2}{a_1^2} + 144\frac{a_2a_4}{a_1^2} \\ &\qquad - 36\frac{a_5}{a_1} + \frac{6B}{n+1}\left[(n+11)\frac{a_2^2}{a_1^2} - (n+5)\frac{a_3}{a_1}\right] - 12\frac{C}{n+1}\frac{a_2}{a_1} + \frac{E}{n+1}\Big\}.\end{aligned}\right.$$

II.

Une grande simplification est obtenue par l'introduction de certaines fonctions auxquelles M. Laguerre a donné le nom d'*invariants* des équations différentielles linéaires.

En premier lieu, on trouve presque immédiatement la relation

$$(7) \qquad 3\frac{dB_0}{dz} - 2C_0 = a_1^{-3}\left(3\frac{dB}{dx} - 2C\right).$$

On voit qu'après la transformation la fonction $3\frac{dB}{dx} - 2C$ se reproduit à un facteur près dépendant uniquement de la transformation; M. Laguerre l'a nommé *invariant*, et en effet la définition qui précède est tout à fait semblable à celle des invariants dans la théorie des formes algébriques. Je ferai seulement remarquer que M. Laguerre ne l'a obtenue qu'en considérant des équations du troisième ordre; et c'est un fait remarquable que, dans le cas d'un ordre quelconque, cet invariant est indépendant de cet ordre. Toutefois j'en ai simplifié un peu l'expression en supposant que l'on ait fait disparaître le second terme de l'équation différentielle; en prenant l'équation complète, on retrouve facilement cet invariant sous la forme que lui a donnée M. Laguerre.

Je détermine un nouvel invariant de l'équation différentielle en remarquant que les expressions de B_0^2, $\frac{d^2B_0}{dz^2}$, $\frac{dC_0}{dz}$ renferment les mêmes arguments que l'expression de E_0; je forme en conséquence l'expression

$$MB_0^2 + N\frac{d^2B_0}{dz^2} + P\frac{dC_0}{dz} + E_0,$$

dans laquelle M, N, P sont des constantes, et je cherche à déterminer celles-ci de manière à la rendre aussi simple que possible. C'est ainsi qu'on peut égaler à zéro certains coefficients des arguments, et, en faisant un choix convenable de ces coefficients, on est conduit à poser

$$M = -3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}, \quad N = \frac{6}{5}, \quad P = -2;$$

il en résulte la relation

$$(8) \quad -3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}B_0^2 + \frac{6}{5}\frac{d^2B_0}{dz^2} - 2\frac{dC_0}{dz} + E_0 = a_1^{4}\left(-3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}B^2 + \frac{6}{5}\frac{d^2B}{dx^2} - 2\frac{dC}{dx} + E\right).$$

Le multiplicateur de a_1^{-4} est l'invariant de l'équation différentielle dont il s'agit en ce moment.

En combinant les deux équations (7) et (8) de manière à faire

disparaître la fonction a_1, il vient

$$\frac{-3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}B^2+\frac{6}{5}\frac{d^2B}{dx^2}-2\frac{dC}{dx}+E}{\left(3\frac{dB}{dx}-2C\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{-3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}B_0^2+\frac{6}{5}\frac{d^2B_0}{dz^2}-2\frac{dC_0}{dz}+E_0}{\left(3\frac{dB_0}{dz}-2C_0\right)^{\frac{3}{4}}};$$

et cette équation présente cette propriété curieuse, que le second membre reste toujours égal au premier, quelle que soit la fonction x de z que l'on emploie pour faire la transformation. Ce premier membre est un invariant absolu de l'équation différentielle.

III.

Maintenant, à la place des équations (7) et (8), nous écrivons

$$(9)\qquad \sqrt[3]{H_0}\,dz=\sqrt[3]{H}\,dx,\quad \sqrt[4]{\Theta_0}\,dz=\sqrt[4]{\Theta}\,dx,$$

et, à la place des formules (6),

$$(6\,bis)\begin{cases} B_0=\frac{n+1}{a_1^2}\left(\frac{a_2^2}{a_1^2}-\frac{a_3}{a_1}+\frac{B}{n+1}\right)=(n+1)\left(-\frac{b_2^2}{b_1^2}+\frac{b_3}{b_1}+\frac{B}{n+1}b_1^2\right),\\ C_0=\frac{3}{2}\frac{dB_0}{dz}-\frac{1}{2}H_0,\\ E_0=3\frac{n\div\frac{7}{5}}{n+1}B_0^2+\frac{9}{5}\frac{d^2B_0}{dz^2}+\Theta_0-\frac{dH_0}{dz},\end{cases}$$

qui donnent les valeurs des premiers termes de la transformée (5) et qui renferment une fonction arbitraire $a_1=\frac{dz}{dx}$ ou $b_1=\frac{dx}{dz}$.

On peut profiter de diverses manières de l'indétermination de la fonction $\frac{dz}{dx}$. Voici divers cas :

1° En vertu de la première des formules (6 *bis*), on peut considérer B_0 comme une fonction donnée de z; car il en résulte une équation différentielle qui établit une relation entre x et z; les équations (9) déterminent ensuite H_0 et Θ_0.

Si l'on fait, par exemple, $B_0=0$, on a l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2a_1^{-\frac{1}{2}}}{dx^2}+\frac{B}{n+1}a_1^{-\frac{1}{2}}=0,$$

et l'équation transformée (5) devient

$$\frac{d^n u}{dz^n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} H_0 \frac{d^{n-3} u}{dz^{n-3}} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \left(\Theta_0 - \frac{dH_0}{dz}\right) \frac{d^{n-4} u}{dz^{n-4}} + \ldots = 0;$$

c'est le second théorème de M. Laguerre, complété par la détermination de deux des termes de l'équation différentielle.

2° En prenant pour H_0 une fonction arbitraire de z, la première des équations (9) établit une relation entre x et z; la seconde des équations (9) détermine ensuite Θ_0; enfin les coefficients B_0, C_0, E_0 sont donnés par les équations (6 *bis*).

Dans le cas particulier de $n = 3$, $H_0 = 1$, on a le premier théorème de M. Laguerre.

3° On a une nouvelle transformation en donnant à Θ_0 une valeur arbitraire; la première des équations (9) détermine H_0 et les coefficients B_0, C_0, E_0 s'ensuivent.

4° Les équations (9) donnent encore

$$\frac{\Theta_0}{H_0} - \frac{1}{H_0}\frac{dH_0}{dz} = \frac{a_1^{-4} H}{H_0}\left(\frac{\Theta}{H} + \frac{3}{a_1}\frac{da_1}{dx} - \frac{1}{H}\frac{dH}{dx}\right).$$

En posant

$$\frac{\Theta}{H} + \frac{3}{a_1}\frac{da_1}{dx} - \frac{1}{H}\frac{dH}{dx} = 0,$$

on détermine une nouvelle relation entre z et x. La première des équations (9) détermine ensuite H_0, puis on en déduit les coefficients B_0, C_0, E_0.

En particulier, la transformée du quatrième ordre devient

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 6 B_0 \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\left(3\frac{dB_0}{dz} - H_0\right)\frac{du}{dz} + \left(\frac{9^2}{5^2} B_0^2 + \frac{9}{5}\frac{d^2 B_0}{dz^2}\right) u = 0.$$

Ces transformations dépendent, la première d'une équation différentielle linéaire du second ordre, les trois autres des quadratures.

Les calculs pour passer de l'équation proposée (1) à l'équation transformée (5) sont déjà très pénibles. Comme les résultats auxquels on arrive sont relativement très simples, on doit croire qu'un calcul meilleur conduirait plus rapidement à ces résultats et sans doute à la détermination d'autres termes de la transformée.

Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan; par M. E. Picard.

(Séance du 7 mars 1884.)

1. On connaît l'importance du groupe de substitutions

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

où a, b, c, d sont quatre entiers réels satisfaisant à la condition $ad - bc = 1$. A chaque point z situé au-dessus de l'axe des quantités réelles correspond par une telle substitution un point qui est également au-dessus du même axe. On sait aussi qu'à un point quelconque du demi-plan correspond, en général, par une substitution du groupe, un point et un seul situé dans le triangle formé par les trois courbes

$$x = -\tfrac{1}{2}, \quad x = +\tfrac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

triangle dont un des sommets est à l'infini sur l'axe des y.

Ce théorème important est, comme il est bien connu, étroitement lié à la question de la réduction des formes quadratiques binaires définies; on peut, par exemple, le rattacher à cette question de la manière suivante.

Posons

$$z = x + iy,$$

la partie réelle de $\frac{az+b}{cz+d}$ sera alors

$$\frac{ac(x^2+y^2) + (ad+bc)x + bd}{c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2},$$

et le carré du module de la même expression est égal à

$$\frac{a^2(x^2+y^2) + 2abx + b^2}{c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2},$$

x, y désignant ainsi deux constantes arbitraires (je suppose seulement $y > 0$); considérons la forme quadratique aux indéterminées X et Y,

(1) $$X^2 + 2xXY + (x^2 + y^2)Y^2;$$

cette forme, comme on le voit, de suite, est définie. Si l'on effectue sur elle la substitution

(II) $$(X,\ Y,\ dX + bY,\ cX + aY),$$

elle devient

(III) $$\left\{\begin{array}{l}[c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2]X^2\\ \quad +2[(x^2+y^2)ac+(ad+bc)x+bd]XY\\ \quad +[a^2(x^2+y^2)+2abx+b^2]Y^2.\end{array}\right.$$

Or on peut choisir les entiers a, b, c, d avec la condition

$$ad - bc = 1,$$

de telle manière que cette forme soit réduite; je rappelle l'énoncé du théorème fondamental relatif à la réduction des formes définies. Soit

$$AX^2 + 2BXY + CY^2$$

une forme définie positive à coefficients quelconques

$$(A > 0,\ C > 0,\ B^2 - AC < 0).$$

Par une substitution (II) à coefficients entiers, on peut la transformer en une autre

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2,$$

dans laquelle on aura $A' \leq C'$ et $-A' \leq 2B' \leq A'$.

En appliquant ce théorème à la forme (I), on voit que l'on peut choisir les entiers a, b, c, d de telle manière que la forme (III) soit réduite, par suite

$$\frac{c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2}{a^2(x^2+y^2)+2abx+b^2} < 1;$$

donc le module de $\dfrac{az+b}{cz+d}$ sera plus grand que l'unité et les secondes conditions de la réduction nous apprennent que la partie réelle de $\dfrac{az+b}{cz+d}$ est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

2. En cherchant à généraliser ces considérations si simples, j'ai été conduit à un groupe de transformations des points d'un demi-espace (portion de l'espace située d'un côté d'un plan) tout à fait analogue au groupe de transformations des points d'un demi-plan, dont je viens de parler.

Au lieu de la forme quadratique (I), je vais envisager une forme quadratique à indéterminées conjuguées. On se rappelle que M. Hermite a donné ce nom aux formes telles que

$$AXX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + CYY_0,$$

dans laquelle X et X_0 ainsi que Y et Y_0 sont deux variables complexes conjuguées. A et C sont réels, et B_0 est la conjuguée de B; quand $BB_0 - AC < 0$, $A > 0$, $C > 0$, la forme est dite définie et positive. La forme qui va remplacer la forme (I) sera

$$(\text{I}') \qquad XX_0 + xXY_0 + x_0X_0Y + (xx_0 + y^2)YY_0.$$

x est une quantité complexe arbitraire, et y une quantité réelle positive.

La substitution

$$(X, Y, dX + bY, cX + aY) \quad [ad - bc = 1],$$

où maintenant a, b, c, d peuvent être complexes, la transforme en

$$A'XX_0 + B'XY_0 + B'_0X_0Y + C'YY_0,$$

en posant

$$A' = cc_0(xx_0 + y^2) + dc_0x + d_0cx_0 + dd_0,$$
$$B' = ca_0(xx_0 + y^2) + a_0dx + cb_0x_0 + db_0,$$
$$C' = aa_0(xx_0 + y^2) + ba_0x + b_0ax_0 + bb_0.$$

On est ainsi conduit à une transformation relative à la variable complexe x et à la somme $xx_0 + y^2$, substitution qui peut s'écrire

$$(\text{S}) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{ca_0(xx_0 + y^2) + a_0dx + cb_0x_0 + db_0}{cc_0(xx_0 + y^2) + dc_0x + d_0cx_0 + dd_0}, \\[2ex] x'x'_0 + y'^2 = \dfrac{aa_0(xx_0 + y^2) + ba_0x + b_0ax_0 + bb_0}{cc_0(xx_0 + y^2) + dc_0x + d_0cx_0 + dd_0}; \end{cases}$$

à un système de valeurs de la quantité complexe x et de la quantité positive y correspond par ces formules un système parfaitement déterminé de x' et y' (y' étant positif comme y). Ce mode de transformation forme d'ailleurs évidemment un groupe, quand a, b, c, d prennent toutes les valeurs complexes satisfaisant à la relation

$$ad - bc = 1;$$

on peut donner une forme géométrique à ce résultat. Soient $O\xi$, $O\eta$,

$O\zeta$ un système d'axes de coordonnées rectangulaires et considérons le demi-espace situé au-dessus du plan des $\xi\eta$; à chaque point (ξ, η, ζ) correspond un système de valeurs de la quantité complexe x et de la quantité positive y, si l'on pose

$$x = \xi + i\eta, \quad y = \zeta,$$

et réciproquement à tout système (x, y) correspond dans le demi-espace un point (ξ, η, ζ).

A la substitution (S) correspond donc une transformation du point (ξ, η, ζ) en un autre point du demi-espace. Nous sommes ainsi conduit, par les considérations algébriques qui précèdent, au mode de transformation des figures dans un demi-espace, dont M. Poincaré a déjà fait usage dans son Mémoire sur les groupes kleinéens et auquel il avait été amené par des considérations géométriques.

3. Dans ce qui précède, les coefficients a, b, c, d étaient des constantes complexes quelconques de déterminant un. Supposons maintenant que a, b, c et d soient des *entiers* complexes quelconques satisfaisant à la relation

$$ad - bc = 1.$$

Je dis que dans ce cas *les substitutions* (S) *formeront un groupe discontinu* pour tout point du demi-espace non situé dans le plan des $\xi\eta$.

Pour démontrer ce fait, il suffit d'établir qu'il existe dans le demi-espace une certaine région dans laquelle il n'y aura, en général, qu'un seul point (et dans tous les cas un nombre limité) correspondant par des substitutions du groupe à un point quelconque.

Nous allons faire usage du théorème relatif à la réduction des formes quadratiques binaires définies à indéterminées conjuguées. Étant donnée une telle forme

$$AXX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + CYY_0 \qquad (BB_0 - AC < 0, \quad A > 0, \quad C > 0),$$

dont les coefficients sont quelconques, on peut trouver une substitution

$$(X, Y, dX + bX, cX + aY),$$

où a, b, c, d sont des entiers complexes de déterminant un, telle

que, dans la forme transformée

$$A'XX_0 + B'XY_0 + B'_0X_0Y + C'YY_0,$$

on ait

$$A' \leq C', \quad -A' \leq 2m' \leq A', \quad -A' \leq 2n' \leq A'$$

en posant

$$B' = m' + n'i;$$

cette substitution sera, en général, unique; dans tous les cas, il n'y en aura qu'un nombre limité.

Ceci rappelé, soit (x, y) un système de valeurs correspondant à un point arbitraire du demi-espace et prenons la forme (I′) correspondante; cette forme est définie, et l'on peut trouver une substitution à coefficients entiers

$$(X, Y, dX + bY, cX + aY)$$

qui la réduise : s'il y en a plus d'une, elles seront en nombre limité. Or à la substitution précédente correspond la substitution (S′), effectuée sur (x, y); mais, d'après les inégalités qui expriment la réduction, on voit que, pour le système transformé (x', y'), la partie réelle et le coefficient de i dans x' seront compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et l'on aura, en outre,

$$x'x'_0 + y'^2 \geq 1.$$

Revenons au point (ξ, η, ζ) et soit (ξ', η', ζ') le transformé correspondant à x' et y', on aura

$$-\tfrac{1}{2} \leq \xi' \leq \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leq \eta' \leq \tfrac{1}{2}$$

et

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \geq 1;$$

nous sommes donc assuré qu'il y a, en général, un seul point (ξ', η', ζ') situé dans le volume limité par les quatre plans $\xi = \frac{1}{2}$, $\xi = -\frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{2}$, $\eta = -\frac{1}{2}$ et extérieur à la sphère de rayon un, qui corresponde par les substitutions du groupe à un point quelconque (ξ, η, ζ) du demi-espace. Le groupe est donc discontinu et nous trouvons, en même temps, son *polyèdre fondamental;* celui-ci est entièrement analogue au triangle fondamental que l'on obtient dans le demi-plan et sur lequel nous nous sommes arrêté au commencement de cet article.

Sur la forme des intégrales des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de certains points critiques; par M. Émile Picard.

(Séance du 4 avril 1884.)

Dans leurs mémorables recherches sur les équations différentielles (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI), MM. Briot et Bouquet ont étudié certains cas où le coefficient différentiel devient indéterminé. Soit considérée l'équation

$$(1) \qquad z\frac{du}{dz} = f(u, x),$$

et supposons que, pour $z = 0$, $u = 0$, le second membre s'annule; soit, d'ailleurs, une fonction holomorphe de u et de z dans le voisinage de $u = 0$, $z = 0$.

Écrivons les premiers termes du développement de $f(u, z)$

$$f(u, z) = az + bu + \dots.$$

MM. Briot et Bouquet ont établi que, si le coefficient b n'est pas égal à un nombre entier positif, l'équation différentielle admet une intégrale holomorphe dans le voisinage de l'origine et s'annulant en ce point. De plus, si la partie réelle de b est positive, il existera une infinité d'autres intégrales s'annulant pour $z = 0$; il n'en existe, au contraire, aucune autre si la partie de b est négative.

Arrêtons-nous sur le cas où la partie réelle de b est positive et plus grande que 1 (nous pouvons faire cette dernière hypothèse sans restreindre la généralité, *voir* le Mémoire cité). On peut montrer que l'équation différentielle admet une infinité d'intégrales, s'annulant pour $z = 0$ et se présentant sous forme de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de z et z^{b-1}; c'est ce que nous avons établi simultanément, M. Poincaré et moi, il y a plusieurs années (Poincaré, *Journal de l'École Polytechnique*, XLVe Cahier, et Picard, *Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage*

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins..........................	4,60
De cinq à neuf volumes..........................	5,00
Moins de cinq volumes..........................	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XII. — N° 2.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1884

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois, à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

---

de certains points critiques, Comptes rendus, septembre et novembre 1878) (¹). Rappelons la démonstration de ce résultat.

Si l'on désigne par u_1 l'intégrale holomorphe dont nous avons parlé plus haut et que l'on pose $u = u_1 + v$, l'équation (1) prendra la forme

$$(2) \qquad z\frac{dv}{dz} = v[b + \varphi(v, z)],$$

$\varphi(v, z)$ désignant une série, sans terme constant, ordonnée suivant les puissances croissantes de v et de z. Posons maintenant $v = \lambda z^b$, et l'équation (2) pourra s'écrire

$$(3) \qquad \frac{d\lambda}{dz} = \lambda P(z, z^{b-1}, \lambda),$$

P désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de z et z^{b-1} et λ. Considérons alors l'équation aux dérivées partielles

$$z\frac{\partial\lambda}{\partial z} + (b-1)\frac{\partial\lambda}{\partial y}y = \lambda z P(z, y, \lambda),$$

où λ est une fonction des deux variables indépendantes z et y. On établit que cette équation admet une intégrale holomorphe par rapport à z et y, qui prend, pour $z = 0$, $y = 0$, la valeur arbitraire λ_0; soit

$$\lambda = \lambda_0 + Az + By + \ldots.$$

Si l'on pose dans cette série $y = z^{b-1}$, λ devient une fonction de z, qui satisfait à l'équation (3).

On obtient ainsi une infinité d'intégrales de l'équation

$$z\frac{dv}{dz} = v[b + \varphi(v, z)],$$

qui prennent la valeur zéro pour $z = 0$. Obtient-on de cette manière *toutes les intégrales qui s'annulent pour* $z = 0$? Il en est effectivement ainsi : c'est ce que j'énonçais dans une des Notes citées plus haut. Je me propose d'en développer ici la démonstration, qui est bien simple.

(¹) Je traite dans ces articles des équations différentielles du second ordre; le cas des équations du premier ordre n'est évidemment qu'un cas particulier de ce cas plus général.

Il importe d'abord de préciser les intégrales dont il s'agit. Nous supposons que ce sont des fonctions analytiques de z, qui, dans un certain domaine autour de l'origine, n'ont d'autre point singulier que ce dernier point; de plus, elles tendent vers zéro, quand z tend vers zéro, pourvu toutefois que son argument reste fini.

Ceci posé, je dis d'abord que, si v est une intégrale de l'équation (2) qui s'annule pour $z = 0$, la limite de $\frac{v}{z^b}$, quand z tend vers zéro, est une quantité finie différente de zéro. Suivons, pour le faire voir, une marche analogue à celle qui a été employée par MM. Briot et Bouquet, dans le cas où b était un nombre négatif. Nous écrirons l'équation sous la forme

$$z\frac{dv}{dz} = bv[1 + \psi(v) + z\chi(v, z)],$$

où ψ est une série ordonnée suivant les puissances de v, et sans terme constant. En divisant par $1 + \psi(v)$ les deux membres, nous aurons

$$\frac{dv}{v}(1 + \alpha v + \alpha_1 v^2 + \ldots) = b\frac{dz}{z} + \chi_1(v, z)\,dz,$$

χ_1 étant une série ordonnée suivant les puissances de v et z.

Prenons un point z_1, dans le voisinage de l'origine, où une des déterminations v_1 de l'intégrale considérée v soit différente de zéro. Joignons ce point à l'origine par un chemin arbitraire C (la ligne droite, par exemple), et soit z_1^b une des déterminations de la fonction z^b au point z_1. En intégrant le long du chemin C, depuis le point z_1 jusqu'à un point variable z, nous aurons

$$\frac{v}{v_1} = \frac{z^b}{z_1^b}e^t,$$

t étant une fonction de z, qui, pour l'origine, a une valeur finie. Par suite, quand z partant du point z_1 (z^b ayant au début la détermination z_1^b) tend vers zéro en suivant le chemin C, $\frac{v}{z^b}$ tend vers une valeur finie parfaitement déterminée et différente de zéro, que nous désignerons par λ_0.

Nous poserons maintenant $v = \lambda z^b$, la détermination de z^b sur le chemin C étant celle qui a été précédemment considérée; nous

avons dit que λ satisfera à l'équation

$$\frac{d\lambda}{dz} = \lambda \mathrm{P}\left(z, \frac{z^b}{z}, \lambda\right).$$

Nous voulons considérer les intégrales de cette équation, qui tendent vers λ_0 quand z tend vers zéro, en suivant le chemin C. Nous avons obtenu, sous forme de série, une intégrale λ_1 remplissant cette condition, il faut montrer qu'il n'y en a pas d'autre. Posons $\lambda = \lambda_1 + \mu$, μ satisfera à une équation de la forme

$$\frac{d\mu}{dz} = \mu \mathrm{Q}(z, z^{b-1}, \mu).$$

S'il existe une intégrale autre que λ_1, cette dernière équation admettra une intégrale μ, qui tendra vers *zéro* quand z se rapprochera de l'origine en suivant le chemin C. Mais cela est impossible; on le voit par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut; on a

$$\frac{d\mu}{\mu} = \mathrm{Q}(z, z^{b-1}, \mu);$$

et en intégrant sur le chemin C depuis un point z_1, où μ a une valeur différente de zéro jusqu'à un point variable z, on voit que le premier membre augmenterait indéfiniment, tandis que le second resterait fini.

L'équation (2) n'a donc d'autres intégrales égales à zéro, pour $z = 0$, que celles qui sont données par les développements en série, procédant suivant les puissances croissantes de z et z^{b-1}.

Sur les transformations invariantes des différentielles elliptiques; par M. Louis Raffy.

(Séance du 4 avril 1884.)

1. *Définitions.* — Soit $f(x)$ une fonction rationnelle, et $\mathrm{R}(x)$ un polynôme entier du troisième ou du quatrième degré. Nous dirons que la différentielle elliptique

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$$

est susceptible d'une *transformation invariante*, s'il existe une fonction y de x, telle qu'on ait

$$f(x) = -f(y),$$

ainsi que

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}.$$

La *transformation invariante* consiste dans le changement de variable qui substitue y à x; elle est déterminée par l'équation qui définit y comme fonction de x.

2. Théorème I. — *Toute différentielle elliptique, susceptible d'une transformation invariante, s'intègre en termes finis.*

D'après leur définition même, les transformations invariantes de la différentielle

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

sont toutes (si elles existent) des solutions de l'équation d'Euler,

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}.$$

Si donc on pose

$$R(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4,$$

elles sont comprises parmi les fonctions y, que définit, pour les diverses valeurs de l'arbitraire G, la relation

$$(1)\quad \begin{cases} \beta^2 - 4\alpha G + (2\beta\gamma - 4\alpha\delta - 2\beta G)(x+y) + (\gamma^2 - 4\alpha\varepsilon - 2\gamma G + G^2)(x^2+y^2) \\ \quad + 2(\gamma^2 - 4\alpha\varepsilon - \beta\delta - G^2)xy + 2(\gamma\delta - 2\beta\varepsilon - \delta G)(x+y)xy + (\delta^2 - 4\varepsilon G)x^2y^2 = 0, \end{cases}$$

intégrale générale de l'équation d'Euler ([1]). Soit y l'une d'elles. On a

$$f(x) = -f(y),$$

d'où résulte

$$2\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = [f(x) - f(y)]\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

([1]) *Voir* Lagrange, *Œuvres complètes*, t. II, p. 18. (*Sur l'intégration de quelques équations différentielles.*)

Or la différence $f(x) - f(y)$ est égale au produit de $x - y$ par une fonction symétrique de x et de y, c'est-à-dire par une fonction rationnelle de $x + y$ et de xy. Posons

$$s = x + y, \quad p = xy;$$

il vient

$$f(x) - f(y) = (x - y)\varphi(s, p),$$

φ désignant une fonction rationnelle de s et de p. Par suite, on a

$$2\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{x - y}{\sqrt{R(x)}}\,\varphi(s, p)\,dx.$$

Mais l'intégrale générale de l'équation d'Euler peut se mettre sous l'une des deux formes (¹)

$$\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(y)} = (x - y)\sqrt{G + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2}, \quad \text{pour } \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R(y)}},$$

$$\sqrt{R(x)} - \sqrt{R(y)} = (x - y)\sqrt{G + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2}, \quad \text{pour } \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}.$$

Dans les deux cas, on peut écrire, en divisant les deux membres par $\sqrt{R(x)}$,

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{\sqrt{R(x)}}\sqrt{G + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2}.$$

De cette relation, on tire, en écrivant s à la place de $(x + y)$,

$$\frac{x - y}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right).$$

Substituant dans l'expression de la différentielle proposée, il vient

$$\frac{2f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{\varphi(s, p)}{\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}}(dx + dy) = \frac{\varphi(s, p)\,ds}{\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}}.$$

Notre théorème sera évidemment prouvé si nous montrons que

(¹) *Voir* Lagrange, *loc. cit.*, p. 17-18. Signalons quelques fautes d'impression dans ce passage; dans toutes les équations des pages 17 et 18 (sauf les deux dernières de la page 18), il faut partout lire G au lieu de G^2. Dans les deux dernières équations de la page 18, le coefficient du terme en $x + y$ doit être pris égal à

$$(2\beta\gamma - 4\alpha\beta - 2\beta G),$$

et non pas à

$$(2\beta\gamma + 4\alpha\delta - 2\beta G).$$

p est une fonction rationnelle de s et du radical $\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}$.

Pour le faire voir, reprenons l'intégrale de l'équation d'Euler, sous la première forme citée plus haut, et introduisons s et p à la place de $(x+y)$ et de xy. Nous trouvons, après avoir ordonné,

$$(2)\quad \begin{cases} (\delta^2 - 4\varepsilon G)p^2 - 2\{[(G-\gamma)\delta + 2\beta\varepsilon]s + 2G(G-\gamma) + \beta\delta\}p \\ \qquad + [(G-\gamma)^2 - 4\alpha\varepsilon]s^2 - 2[2\alpha\delta + (G-\gamma)\beta]s + \beta^2 - 4\alpha G = 0; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(3)\quad p = \frac{[(G-\gamma)\delta + 2\beta\varepsilon]s + 2G(G-\gamma) + \beta\delta \pm 2\sqrt{\lambda}\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}}{\delta^2 - 4\varepsilon G},$$

en posant

$$\lambda = G[(G-\gamma)^2 - 4\alpha\varepsilon] + (G-\gamma)\beta\delta + \alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2.$$

Ainsi p est bien une fonction rationnelle de s et de $\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}$, ce qui démontre notre théorème. Si $\delta^2 - 4\varepsilon G$ était nul, p serait une fonction rationnelle de s : d'où la même conclusion.

3. *Remarque*. — Les raisonnements précédents tombent en défaut lorsque la transformation invariante est définie par l'équation

$$x + y = s = \text{const.} = G.$$

Dans ce cas, le polynôme $R(x)$ ne peut être que du quatrième degré, comme nous l'établirons un peu plus loin. De plus, nous verrons que, si l'on pose

$$R(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

la transformation invariante en question ne peut être que la suivante :

$$x + y = a + b = c + d.$$

Alors on a

$$R(x) = \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + cd - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right],$$

$$p = xy = x(a+b-x) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$x - y = x - (a+b-x) = 2\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

en sorte que la différentielle considérée prend la forme

$$\frac{2f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\varphi\left[G,\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx}{\sqrt{\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[\left(x-\frac{a+b}{\delta}\right)^2+cd-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]}}.$$

Elle devient immédiatement intégrable en prenant pour nouvelle variable $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$.

4. Théorème II. — *Pour qu'une différentielle elliptique*

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

soit susceptible d'une transformation invariante, il faut et il suffit :

Ou bien que l'équation

$$f(x)+f(y)=0,$$

mise sous la forme entière

$$F(p,s)=0,\quad (p=xy,\ s=x+y),$$

ait son premier membre divisible par

$$(\delta^2-4\varepsilon G)p-[(G-\gamma)\delta+2\beta\varepsilon]s-[2G(G-\gamma)+\beta\delta],$$

G *étant l'une des racines de l'équation*

$$\lambda(G)=G[(G-\gamma)^2-4\alpha\varepsilon]+(G-\gamma)\beta\delta+\alpha\delta^2+\varepsilon\beta^2=0;$$

Ou bien qu'on puisse disposer de G, *de manière que le premier membre de l'équation* $F(p,s)=0$ *devienne divisible par le premier membre de l'équation*

$$(2)\quad \begin{cases} (\delta^2-4\varepsilon G)p^2-2[(G-\gamma)\delta+2\beta\varepsilon]ps+[(G-\gamma)^2-4\alpha\varepsilon]s^2 \\ \quad -2[2G(G-\gamma)+\beta\delta]p-2[2\alpha\delta+(G-\gamma)\beta]s+\beta^2-4\alpha G=0. \end{cases}$$

En effet, soit y une solution de l'équation (1), telle qu'on ait $f(x)+f(y)=0$. Cette fonction y est une solution commune aux deux équations (1) et $f(x)+f(y)=0$. Le premier membre de l'équation $f(x)+f(y)=0$ est donc divisible par celui de l'équation (1), si cette dernière est irréductible, ou par l'un des facteurs de ce premier membre, si l'équation (1) représente une courbe décomposable.

Voyons ce qui arrive dans ce dernier cas. Pour que l'équation (1) se décompose, il faut et il suffit visiblement qu'il en soit de même de l'équation (2), c'est-à-dire qu'on ait

$$\lambda(G) = 0;$$

mais alors l'équation (2) a pour premier membre le carré de

$$T = (\delta^2 - 4\varepsilon G)p - [(G-\gamma)\delta + 2\beta\varepsilon]s - [2G(G-\gamma) + \beta\delta],$$

et, comme le premier membre de l'équation $f(x) + f(y) = 0$ est divisible par ce que devient le trinôme linéaire T quand on y remplace p par xy et s par $x + y$, le premier membre de l'équation $F(p, s) = 0$ est divisible par ce trinôme lui-même, comme nous l'avions annoncé, sous la condition $\lambda(G) = 0$.

Si l'équation (1) est irréductible, son premier membre divise le premier membre de l'équation $f(x) + f(y) = 0$, ce qui revient à dire que le premier membre de l'équation (2) divise le premier membre de l'équation $F(p, s) = 0$ quand on attribue à G la valeur particulière qui donne la transformation invariante que nous considérons.

Réciproquement, si l'une des conditions dont nous venons d'établir la nécessité est réalisée, il existe une transformation invariante. En effet, dire que le premier membre de l'équation $F(p, s) = 0$ est divisible par le trinôme T ou par le premier membre de l'équation (2), c'est dire que $f(x) + f(y)$ s'annule quand on y remplace y par sa valeur tirée soit de l'équation $T = 0$, soit de l'équation (2). Dans le premier cas, l'équation $T = 0$ définit une transformation invariante; dans le second, l'équation (2) en définit aussi une. La proposition énoncée est donc établie.

5. Elle fournit, comme on le voit immédiatement, une méthode régulière pour reconnaître si une différentielle elliptique donnée admet ou n'admet pas de transformation invariante. En appliquant cette méthode à une différentielle convenablement choisie,

$$\frac{x-1}{x+2}\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{2}{3}\, d \operatorname{arc\,tang} \frac{(x-1)^2}{3\sqrt{x^3-1}}$$

par exemple, on s'assure qu'une différentielle elliptique peut être intégrable en termes finis, sans être susceptible d'aucune transformation invariante.

Ce qui fait l'intérêt des transformations invariantes, c'est qu'elles permettent d'indiquer des classes très étendues d'intégrales pseudo-elliptiques, et de retrouver, en les généralisant, certains exemples connus de différentielles en apparence elliptiques, qui s'intègrent en termes finis. Nous allons faire connaître les types les plus simples, ceux qui se rattachent aux transformations invariantes du premier ordre.

A cet effet, nous chercherons toutes les transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle elliptique de première espèce, en supposant successivement que le radical porte sur un polynôme du troisième et sur un polynôme du quatrième degré.

6. Proposons-nous de trouver toutes les transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}.$$

Nous savons que la nouvelle variable t est liée à z par une équation symétrique en z et t. Soit

$$Ntz = L(t+z) + M$$

la relation qui définit t. On en tire

$$z = \frac{Lt+M}{Nt-L}.$$

Substituons cette valeur dans la différentielle proposée; il vient

$$\frac{(L^2+MN)\,dt}{-(Nt-L)^2\sqrt{\frac{(L-Na)t+La+M}{Nt-L}\,\frac{(L-Nb)t+Lb+M)}{Nt-L}\,\frac{(L-Nc)t+Lc+M}{Nt-L}}},$$

ou bien, en faisant abstraction du signe,

$$\frac{(L^2+MN)\,dt}{\sqrt{(Nt-L)[(L-Na)t+La+M][(L-Nb)t+Lb+M][(L-Nc)t+Lc+M]}}.$$

Je dis d'abord que cette expression ne peut être identique à

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}},$$

si N est nul. En effet, elle prend alors la forme

$$\frac{L^2\,dt}{\sqrt{-L^4 t^3 + \ldots}}.$$

Mais, dans ce cas, on peut, sans restreindre la généralité de la transformation, supposer L réel et, par suite, L^2 positif. En divisant haut et bas par L^2, on trouve

$$\frac{dt}{\sqrt{-t^3 + \ldots}}.$$

Cette différentielle ne peut jamais être rendue identique à

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}} = \frac{dt}{\sqrt{+t^3 + \ldots}}.$$

N étant différent de zéro, nous pouvons désormais le supposer égal à 1. Il vient alors

$$\frac{(L^2 + M)\,dt}{\sqrt{(t-L)[(L-a)t + La + M][(L-b)t + Lb + M][(L-c)t + Lc + M]}}.$$

Pour que cette expression soit identique à

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}},$$

il faut d'abord que la quantité sous le radical s'abaisse au troisième degré, c'est-à-dire que L ait une des trois valeurs a, b, c. Prenons $L = a$, ce qui donne

$$\frac{(a^2 + M)\,dt}{\sqrt{(a^2 + M)(t-a)[(a-b)t + ab + M][(a-c)t + ac + M]}}.$$

Il faut encore que le produit

$$[(a-b)t + ab + M][(a-c)t + ac + M]$$

s'annule pour $t = b$ et pour $t = c$, et que son terme en t^2 ait pour coefficient $(a^2 + M)$, afin que le facteur $(a^2 + M)$ soit commun aux deux termes de la fraction. Cette dernière condition s'exprime par la relation

$$(a-b)(a-c) = a^2 + M$$

ou bien

$$(a-b)c + ab + M = 0.$$

équation en vertu de laquelle le facteur binôme

$$[(a-b)t+ab+\mathrm{M}]$$

s'annule pour $t=c$. Il reste donc à exprimer que le facteur binôme

$$[(a-c)t+ac+\mathrm{M}]$$

s'annule pour $t=b$; d'où la relation

$$(a-c)b+ac+\mathrm{M}=0,$$

qui n'est autre que la précédente.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la différentielle proposée se reproduise, au signe près, par la transformation

$$z=\frac{at-\mathrm{M}}{t-a}$$

est qu'on prenne pour M la valeur

$$\mathrm{M}=bc-a(b+c).$$

La transformation cherchée est donc entièrement connue. On en déduira deux autres en permutant les trois lettres a, b, c.

En résumé, l'on a

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}=\frac{\pm dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}},$$

si l'on prend

$$z=\frac{at+bc-a(b+c)}{t-a},$$

ou bien

$$z=\frac{bt+ca-b(c+a)}{t-b}$$

ou encore

$$z=\frac{ct+ab-c(a+b)}{t-c};$$

et ce sont là, d'après ce qui précède, les trois seules transformations du premier degré qui répondent à la question.

Si l'une des racines a, b, c était nulle, c par exemple, la transformation correspondante serait

$$z=\frac{ab}{t},$$

et les deux autres transformations seraient

$$z = a\,\frac{t-b}{t-a},$$

$$z = b\,\frac{t-a}{t-b}.$$

7. *Remarque.* — Considérons maintenant la différentielle

$$\frac{dz}{\sqrt{\alpha+\beta z^2+\gamma z^2+\delta z^3}} = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

et soit ζ l'une des racines, supposées distinctes, de l'équation $R(z)=0$. Un calcul facile donne, pour les trois transformations du premier ordre qui reproduisent, au signe près, la différentielle proposée, cette expression générale

$$z = \zeta - \frac{1}{\delta\zeta(t-\zeta)}\,\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^3 R\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right].$$

Si l'équation $R(z)=0$ admet une racine nulle, la transformation correspondante est

$$z = \frac{\beta}{\delta t}.$$

8. Proposons-nous maintenant de trouver toutes les transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Soit

$$x = \frac{Ly+M}{Ny-L}$$

une telle transformation. Elle change la différentielle proposée $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ en

$$\frac{-(L^2+M)\,dy}{\sqrt{[(L-Na)y+La+M][(L-Nb)y+Lb+M][(L-Nc)y+Lc+M][(L-Nd)y+Ld+M]}}.$$

Supposons d'abord que N ne soit pas nul, et prenons $N=1$, ce qui donne

$$\frac{-(L^2+MN)\,dy}{\sqrt{[(L-a)y+La+M][(L-b)y+Lb+M][(L-c)y+(Lc+M)][(L-d)y+Ld+M]}}.$$

Pour que cette différentielle soit identique à

$$\frac{\pm dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}},$$

il faut d'abord qu'on ait

$$(L^2+M)^2=(L-a)(L-b)(L-c)(L-d).$$

Il faut ensuite que les racines du polynôme sous le radical soient a, b, c, d.

Examinons si le premier binôme peut s'annuler pour $y=a$. Posons

$$y=\frac{La+M}{a-L}=a.$$

La racine a de l'équation $R(x)=0$ vérifie la relation

$$x^2-2Lx-M=0.$$

On ne peut pas admettre que la même relation soit vérifiée par plus de deux racines de l'équation $R(x)=0$; car alors les deux équations

$$R(x)=0,\quad x^2-2Lx-M=0$$

auraient en commun plus de deux racines, ce qui est impossible, puisque la première est supposée avoir toutes ses racines distinctes.

Supposons maintenant que la relation

$$x^2-2Lx-M=0$$

soit vérifiée seulement par deux des racines a, b de l'équation $R(x)=0$. On aura

$$L=\frac{a+b}{2},\quad M=-ab.$$

Substituons ces valeurs dans la première condition

$$(L^2+M)^2=(L-a)(L-b)(L-c)(L-d);$$

elle devient

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^4=-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\frac{a+b-2c}{2}\,\frac{a+b-2d}{2}$$

ou bien, en supprimant le facteur $\frac{(a-b)^2}{16}$, qui n'est pas nul,

$$(a-b)^2=-(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+4cd.$$

ou encore

$$a^2 + b^2 - 2cd = (a + b)(c + d).$$

Mais il faut en outre que la troisième racine $\frac{Lc + M}{c - L}$ du radical soit égale à d, et la quatrième $\frac{Ld + M}{d - L}$ égale à c; ces deux conditions s'expriment par la seule équation

$$L(c + d) = cd - M,$$

ou bien

$$(a + b)(c + d) = 2(ab + cd).$$

Comparant cette condition avec celle qui vient d'être obtenue, on trouve

$$(a - b)^2 = 0.$$

Ainsi l'hypothèse présente doit être rejetée; il est impossible que deux racines de l'équation $R(x) = 0$ appartiennent à l'équation $x^2 - 2Lx - M = 0$.

Mais je dis même qu'on ne peut pas supposer qu'une seule racine a soit commune à ces deux équations; car, si l'on prend égale à c la seconde racine $\frac{Lb + M}{b - L}$, de l'égalité

$$c = \frac{Lb + M}{b - L}$$

on déduit, en résolvant par rapport à b,

$$b = \frac{Lc + M}{c - L},$$

c'est-à-dire que la troisième racine du radical est égale à b; il faudrait donc que la quatrième $\frac{Ld + M}{d - L}$ fût égale à d. Alors deux racines a et d vérifieraient l'équation $x^2 - 2Lx - M = 0$, ce qui est contre l'hypothèse.

On ne peut donc obtenir l'identification cherchée qu'en groupant les quatre racines a, b, c, d par groupes de deux, tels que si x est une des racines du groupe, $\frac{Lx + M}{x - L}$ est l'autre. Soient a et b les deux racines qui composent un tel groupe. On a, par hypothèse, les deux relations

$$\frac{La + M}{a - L} = b, \quad \frac{Lb + M}{b - L} = a,$$

qui reviennent à la condition unique

$$M = ab - L(a + b).$$

De là résulte

$$L^2 + M = L^2 - (a + b)L + ab = (L - a)(L - b).$$

Portons cette valeur dans l'équation où figure $L^2 + M$; il vient

$$(L - a)^2(L - b)^2 = (L - a)(L - b)(L - c)(L - d),$$

ou bien

$$(L - a)(L - b) = (L - c)(L - d),$$

d'où l'on tire

$$L = \frac{ab - cd}{(a + b) - (c + d)};$$

par suite, on obtient

$$M = ab - (a + b)L = \frac{(a + b)cd - (c + d)ab}{(a + b) - (c + d)}.$$

D'après cela, la transformation cherchée ne peut être que

$$x = \frac{(ab - cd)y + (a + b)cd - (c + d)ab}{[(a + b) - (c + d)]y - (ab - cd)}.$$

Il faut encore vérifier que, si l'on y fait $y = c$, on trouve $x = d$. C'est ce qui a lieu. La symétrie de la formule montre alors que, en y faisant $y = d$, on trouvera $x = c$.

Ainsi les seules transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, sont les trois transformations que fournit la formule précédente quand on y prend successivement, pour a et b, deux quelconques des quatre racines de l'équation $R(x) = 0$, et, par conséquent, pour c et d les deux autres.

9. Il reste pourtant à examiner l'hypothèse $N = 0$. Dans ce cas, L ne peut être nul; nous prendrons $L = 1$, ce qui donne

$$x + y + M = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{\sqrt{(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)}} = \frac{-dy}{\sqrt{(y + a + M)(y + b + M)(y + c + M)(y + d + M)}},$$

On ne peut supposer

$$a + M = -a.$$

Car il faudrait qu'un des trois autres binômes $b + M$, $c + M$, $d + M$ fût égal à son premier terme changé de signe, et qu'on eût, par exemple,

$$b + M = -b,$$

d'où résulterait

$$M = 2b = 2a.$$

L'équation $R(x) = 0$ aurait deux racines égales, contrairement à nos hypothèses.

Soit donc

$$a + M = -b;$$

on déduit de là

$$M = -(a + b)$$

et

$$b + M = -a.$$

Il faut encore

$$c + M = -d, \quad d + M = -c,$$

c'est-à-dire

$$M = -(c + d).$$

De la comparaison des deux valeurs trouvées pour M résulte la condition

$$a + b = c + d.$$

Ainsi il n'y a de transformation du type

$$x + y + M = 0$$

que quand les racines de l'équation $R(x) = 0$ vérifient la relation

$$a + b = c + d,$$

et alors on a

$$M = -(a + b) = -(c + d).$$

Il n'y a visiblement qu'une seule transformation de ce type $N = 0$; car les deux formules

$$x + y = a + b, \quad x + y = c + d$$

ne donnent qu'une seule et même transformation, et il est impossible qu'on ait à la fois

$$a + b = c + d, \quad a + c = b + d.$$

car de ces deux équations résulterait

$$2a = 2d.$$

Voyons ce que devient, pour les différentielles de l'espèce particulière qui nous occupe, la transformation trouvée dans le cas général. Introduisant l'hypothèse $c + d = a + b$, on trouve

$$x = \frac{(ab - cd)y - (a + b)(ab - cd)}{-(ab - cd)} = a + b - y,$$

ce qui n'est autre chose que la transformation spéciale à ce cas. Le type général

$$x = \frac{(ab - cd)y + (a + b)cd - (c + d)ab}{[(a + b) - (c + d)]y - (ab - cd)}$$

comprend donc *toutes* les transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$.

En particulier, pour la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \frac{dx}{k\sqrt{(x - 1)(x + 1)\left(x - \frac{1}{k}\right)\left(x + \frac{1}{k}\right)}},$$

on trouve les trois transformations

$$x = -y, \quad x = \frac{1}{ky}, \quad x = -\frac{1}{ky}.$$

10. Étant donnée une différentielle $\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$, où $\mathrm{R}(x)$ est un polynôme du troisième ou du quatrième degré, nous pouvons désormais considérer comme connues les trois transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, cette différentielle, et nous les représenterons par

$$x = \frac{\mathrm{L}y + \mathrm{M}}{y - \mathrm{L}},$$

L et M ayant les valeurs données précédemment.

Il est aisé de voir que les deux fractions

$$\frac{x - \mathrm{L} + \sqrt{\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}}}{x - \mathrm{L} - \sqrt{\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}}}, \quad \frac{x^2 + 2g(x - \mathrm{L}) + \mathrm{M}}{x^2 - 2\mathrm{L}x - \mathrm{M}},$$

dont la seconde contient un coefficient g, complètement arbitraire, se reproduisent, changées de signe, quand on y fait

$$x = \frac{Ly + M}{y - L}.$$

D'après cela, si l'on désigne par $P(u)$ et $Q(u)$ deux polynômes entiers en u de degré $2n$ et ne contenant que des puissances *paires* de u, mais à coefficients quelconques, les deux fonctions

$$f_1(x) = \frac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}} \frac{P\left(\dfrac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}}\right)}{Q\left(\dfrac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}}\right)},$$

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2g(x - L) + M}{x^2 - 2Lx - M} \frac{P\left(\dfrac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}}\right)}{Q\left(\dfrac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L + \sqrt{L^2 + M}}\right)}$$

se reproduiront, changées de signe, par la transformation

$$x = \frac{Ly + M}{y - L}.$$

Par suite, les deux différentielles

$$\frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \frac{f_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

admettront la transformation invariante

$$x = \frac{Ly + M}{y - L}.$$

La fonction $f_1(x)$ est le quotient de deux polynômes d'ordre impair $2n + 1$; la seconde $f_2(x)$ le quotient de deux polynômes d'ordre pair $2n + 2$. Nous arrivons donc à cette conclusion :

Théorème III. — *Étant donnée la différentielle elliptique* $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, *il existe toujours une infinité de fractions rationnelles* $f(x)$ *de degré donné m pair ou impair, telles que la différentielle* $\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ *admette une transformation invariante du premier ordre.*

Il n'y a d'exception que pour $m = 1$. On ne trouve, pour $m = 1$, que les six différentielles

$$\frac{x - L \pm \sqrt{L^2 + M}}{x - L \mp \sqrt{L + M^2}} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

11. Nous allons compléter ces résultats en faisant connaître *toutes* les différentielles dépendant d'un radical elliptique donné $\sqrt{R(x)}$, qui admettent des transformations invariantes du premier ordre, et conséquemment s'intègrent en termes finis.

Théorème IV. — *Étant donnée une différentielle elliptique* $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, *toutes les différentielles de la forme* $\frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$, *qui admettent une transformation invariante du premier ordre, sont comprises dans le type*

$$\left(x - \frac{Lx + M}{x - L}\right) \psi\left(x + \frac{Lx + M}{x - L}\right) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

le symbole ψ *désignant une fonction rationnelle quelconque, et*

$$x = \frac{Ly + M}{y - L}$$

étant l'une des trois transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$.

En effet, la transformation invariante qu'admet la différentielle $\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ ne peut être qu'une des trois transformations

$$y = \frac{Lx + M}{x - L},$$

dont nous avons appris à calculer les coefficients. Mais on a, en général, pour l'expression de la fonction $f(x)$,

$$2f(x) = f(x) - f(y) = (x - y)\,\varphi(x + y, xy),$$

ainsi que nous l'avons montré à propos du théorème I. Or comme ici l'on a

$$xy = L(x + y) + M,$$

il vient

$$2f(x) = (x - y)\,\varphi[x + y, L(x + y) + M],$$

ce qu'on peut écrire

$$f(x) = (x - y)\,\psi(x + y).$$

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque I. — Il est aisé de voir que les différentielles qui font l'objet du théorème précédent peuvent aussi être mises sous la forme équivalente

$$\frac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}}\,\psi\left(\frac{x^2 + M}{x - L}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Remarque II. — Si l'équation $R(x) = 0$ est telle que les racines a, b, c, d vérifient la relation

$$a + b = c + d,$$

il faut adjoindre aux deux types dérivés de la relation

$$2f(x) = (x - y)\,\varphi[x + y, L(x + y) + M]$$

le type signalé dans la remarque du n° 3.

12. *Applications.* — Nous allons retrouver et généraliser certains résultats connus concernant les intégrales pseudo-elliptiques :

1° Considérons la différentielle $\frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}}$. La valeur de L relative à la racine nulle du radical est $L = 0$; la valeur correspondante de M est $M = ab$. Donc, d'après ce qu'on vient de voir, toutes les différentielles de la forme

$$\frac{z \pm \sqrt{ab}}{z \mp \sqrt{ab}}\,\psi\left(\frac{z^2 + ab}{z}\right)\frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}}$$

s'intègrent en termes finis, quelle que soit la fonction rationnelle ψ. En prenant avec les signes supérieurs $\psi = 1$, on retrouve un résultat donné dans le *Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal* de M. Tisserand, p. 127.

Pareillement, les deux différentielles

$$\frac{z - a + \sqrt{a(a-b)}}{z - a - \sqrt{a(a-b)}}\,\psi\left(\frac{z^2 - ab}{z - a}\right)\frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}},$$

$$\frac{z - b + \sqrt{b(b-a)}}{z - b - \sqrt{b(b-a)}}\,\psi\left(\frac{z^2 - ab}{z - b}\right)\frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}}$$

s'intègrent en termes finis, quelle que soit la fonction rationnelle ψ.

2° Considérons la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\beta x^3+\alpha x^4}}$. On voit immédiatement, sans recourir aux formules établies plus haut, qu'elle se reproduit, au signe près, quand on y change x en $\frac{1}{x}$. Donc, si on la multiplie par une fonction rationnelle quelconque changeant de signe quand on change x en $\frac{1}{x}$, on aura une différentielle intégrable en termes finis. La différentielle

$$\frac{1 \pm x^n}{1 \mp x^n} \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\beta x^3+\alpha x^4}},$$

signalée par M. Réalis [1], est une des différentielles de cette classe qu'il serait facile d'étendre encore.

13. Voici, pour terminer, une proposition qui va nous permettre, connaissant une différentielle elliptique susceptible d'une transformation invariante, d'en déduire une infinité d'autres jouissant de la même propriété, et qui, par suite, s'intégreront en termes finis.

Si, dans une intégrale pseudo-elliptique, on remplace la variable par une fonction rationnelle quelconque, on obtient encore une intégrale qui s'exprime en termes finis; mais elle a en général l'apparence d'une intégrale hyperelliptique. Si l'on effectue le changement de variable spécial auquel on donne, d'après Jacobi et Abel, le nom de *transformation*, l'intégrale pseudo-elliptique se change en une autre intégrale pseudo-elliptique.

Si l'on effectue une *transformation* d'ordre quelconque sur une différentielle elliptique susceptible d'une transformation invariante, on obtiendra une nouvelle différentielle, également elliptique et également intégrable en termes finis. Nous allons voir qu'elle est également susceptible d'une transformation invariante.

Théorème V. — *Toute transformation* (au sens de Jacobi), *effectuée sur une différentielle elliptique susceptible d'une transformation invariante, donne une différentielle elliptique susceptible d'une transformation invariante.*

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 389; 1882.

Soit $\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ une différentielle elliptique que la transformation $z = \psi(x)$ change en $\frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}}$.

Cette même transformation changera la différentielle $\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$ en $\frac{f[\psi(x)]\,dx}{\sqrt{R_1(x)}}$.

La transformation $t = \psi(y)$ changera $\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ en $\frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}$ et $\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}$ en $\frac{f[\psi(y)]\,dy}{\sqrt{R_1(y)}}$.

Donc, si l'on suppose t tel que l'on ait

$$f(z) + f(t) = 0$$

avec

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \pm \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

on aura, par suite,

$$f[\psi(x)] + f[\psi(y)] = 0,$$

ainsi que

$$\frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}.$$

Donc, si z et t sont liés par la relation $\varphi(z, t) = 0$, la relation $\varphi[\psi(x), \psi(y)] = 0$ définira une transformation invariante de la différentielle $\frac{f[\psi(x)]\,dx}{\sqrt{R_1(x)}}$.

Application. — Il résulte des formules du n° 6 que la différentielle $\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)\left(z-\frac{1}{k^2}\right)}}$ admet les trois transformations invariantes

$$z = \frac{1}{k^2 t}, \quad z = \frac{1-k^2 t}{k^2(1-t)}, \quad z = \frac{1-t}{1-k^2 t}.$$

Considérons maintenant la différentielle

$$du = \frac{f(z)\,dz}{2k\sqrt{z(z-1)\left(z-\frac{1}{k^2}\right)}}.$$

Si l'on a

$$f\left(\frac{1}{k^2 z}\right) = -f(z),$$

la différentielle admet la transformation invariante $z = \frac{1}{k^2 t}$.

Si l'on a

$$f\left[\frac{1-k^2 z}{k^2(1-z)}\right] = -f(z),$$

la différentielle admet la transformation invariante $z = \frac{1-k^2 t}{k^2(1-t)}$.

Si l'on a

$$f\left(\frac{1-z}{1-k^2 z}\right) = -f(z),$$

la différentielle admet la transformation invariante $z = \frac{1-z}{1-k^2 z}$.

Effectuons maintenant la *transformation*

$$z = x^2.$$

Il vient

$$du = \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Donc, si la fonction $f(x^2)$ vérifie l'une des trois relations

$$f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) = -f(x^2),\quad f\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right] = -f(x^2),\quad f\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right) = -f(x^2),$$

la différentielle du s'intègre en termes finis. C'est là le résultat donné par M. Hermite dans son Mémoire *Sur une formule d'Euler* (*Journal de Liouville*, 1880).

L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

est

$$\begin{aligned}-4G + [(k^2-1)^2 + 2(k^2+1)G + G^2](x^2+y^2)\\ + 2[(k^2-1)^2 - G^2]xy - 4k^2Gx^2y^2 = 0.\end{aligned}$$

Les trois transformations invariantes, considérées par M. Hermite, s'en déduisent, la première en faisant $G = -(k\pm 1)^2$, la deuxième en faisant $G = k^2 - 1$, la troisième en faisant $G = 1 - k^2$.

Quelques propriétés des parallèles et des anti-parallèles aux côtés d'un triangle; par M. Émile Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique.

(Séance du 6 juin 1884).

Nous avons signalé pour la première fois (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1873), puis au Congrès de l'*Association scientifique pour l'avancement des Sciences,* et depuis dans divers journaux de Mathématiques, les propriétés d'un certain point et de certaines droites du plan d'un triangle; nous avons nommé le point : *centre des médianes anti-parallèles,* et les droites : *médianes anti-parallèles;* comme les travaux sur les questions qui s'y rapportent se sont multipliés de tous côtés, et que de nombreux géomètres : en France, MM. Brocard, Morel, d'Ocagne, G. Tarry, etc.; en Allemagne, MM. Stoll, Kiehl, Furhmann et divers collaborateurs de la *Zeitschrift;* en Belgique, MM. Neuberg, Cesáro, etc.; en Angleterre, M. Tucker, etc., se sont occupés du même sujet, nous croyons, quoique ces considérations soient élémentaires, pouvoir intéresser encore en donnant ici quelques résultats qui nous semblent nouveaux (1).

NOTATIONS.

(ABC, un triangle; O, un point du plan.)

Par O, nous menons l'anti-parallèle :

1° à BC, qui coupe BC en 1_1,	AC en	1_2,	AB en	1_3;
2° à CA, »	»	2_1,	»	2_2,	»	2_3;
3° à AB, »	»	3_1,	»	3_2,	»	3_3.

(1) Nous venons de recevoir un Mémoire fort étendu et fort intéressant de M. Neuberg, Mémoire lu le 2 février 1884 à l'Académie de Belgique, et imprimé *in extenso* dans les Mémoires de l'Académie. Dans ce travail, où sont généralisés de la façon la plus élégante et étendue au tétraèdre une foule de théorèmes se rapportant au triangle, M. Neuberg nous fait l'honneur d'appeler *point de Lemoine* le centre des médianes anti-parallèles. Le titre du Mémoire est : *Memoire sur le tétraèdre.*

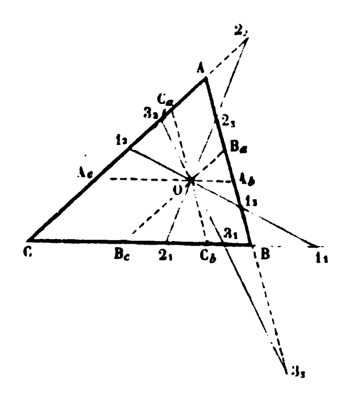
Par O, nous menons une parallèle :

1° à BC, qui coupe BA en A_b, AC en A_c;
2° à CA, » CB en B_c, BA en B_a;
3° à AB, » AC en C_a, CB en C_b.

Nous appellerons ξ, η, ζ les trois longueurs $2_1 3_1$, $3_2 1_2$, $1_3, 2_3$;

»	Z, Y, Z	»	$B_c C_b$, $C_a A_c$, $A_b B_a$;
»	X_1, Y_1, Z_1	»	$A_c A_b$, $B_a B_c$, $C_b C_a$;
»	X_2, Y_2, Z_2	»	$1_2 1_3$, $2_3 2_1$, $3_1 3_2$.

Nous rappellerons que le centre des médianes anti-parallèles est le point de concours des trois droites, qui joignent chaque sommet du triangle aux milieux des anti-parallèles à ce côté. Chacune des droites divisant l'anti-parallèle en deux parties égales s'appelle *médiane anti-parallèle*.



On a, pour tout point O du plan :

1° $$\frac{X_1}{a} + \frac{Y_1}{b} + \frac{Z_1}{c} = 2.$$

2° $$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 1.$$

La première relation est fort connue, et la seconde s'en déduit immédiatement.

3° $$\frac{\xi a^2}{\cos A} + \frac{\eta b^2}{\cos B} + \frac{\zeta c^2}{\cos C} = 2abc;$$

4° $$\frac{X_2 \cos A}{a} + \frac{Y_2 \cos B}{b} + \frac{Z_2 \cos C}{c} = 1.$$

5° *Si* O *se trouve sur la médiane anti-parallèle partant de* C, *la droite* $1_2 2_1$ *est parallèle à* AB.

Si O *se trouve sur la parallèle à* AB *menée par* C, *la droite* $1_2 2_1$ *est parallèle à la médiane anti-parallèle partant de* C.

Si O *se trouve sur la hauteur partant de* C, *la droite* $1_2 2_1$ *est anti-parallèle à* AB.

Si O *se trouve sur l'anti-parallèle à* AB *menée par* C, *la droite* $1_2 2_1$ *sera parallèle à la hauteur partant de* C, etc.

Ces théorèmes et d'autres analogues sur les directions des droites $A_c B_c$ sont des corollaires de la proposition générale suivante :

Par deux points O *et* O', *je mène :*

1° OA, O'A' *parallèles entre elles et coupant en* A *et en* A' *une droite* ωAA';

2° OB, O'B' *parallèles entre elles et coupant en* B *et en* B' *une droite* ωBB'.

Si A'B' et ωO' *sont parallèles,* AB *et* ωO *le seront aussi.*

Cette proposition se généralise encore d'une façon intéressante par projection conique.

6° Le lieu des points O, pour lesquels on a

$$\xi + \eta + \zeta = \text{const.},$$

est une droite.

7° Le lieu des points O, pour lesquels on a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.},$$

est une ellipse qui a pour centre le point dont les coordonnées homogènes sont

$$\frac{a^3}{\cos^2 A}, \frac{b^3}{\cos^2 B}, \frac{c^3}{\cos^2 C},$$

et pour lequel cette somme est un minimum.

8° Le lieu des points O, pour lesquels on a

$$\xi X_1 + \eta Y_1 + \zeta Z_1 = K^2,$$

est un cercle concentrique au cercle circonscrit; K est maximum

lorsque O est au centre de ce cercle, nul pour tout point de la circonférence.

9° Le lieu des points O, pour lesquels on a

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = \text{const.},$$

est un cercle qui a pour centre le point de concours des hauteurs.

10° Le lieu des points O, pour lesquels

$$YZ + XZ + XY = \text{const.},$$

est une ellipse qui a pour centre le point dont les coordonnées homogènes sont

$$\frac{1}{a}\left(b + c - \frac{bc}{a}\right),\quad \frac{1}{b}\left(a + c - \frac{ac}{b}\right),\quad \frac{1}{c}\left(a + b - \frac{ab}{c}\right);$$

pour ce point, la constante a un minimum.

11° Les longueurs X_2, Y_2, Z_2 sont proportionnelles à a, b, c, pour le point dont les coordonnées homogènes sont

$$\frac{1}{r_a h_a},\quad \frac{1}{r_b h_b},\quad \frac{1}{r_c h_c},$$

r_a, r_b, r_c, h_a, h_b, h_c étant les rayons des cercles exinscrits et les hauteurs, et aussi pour les points

$$-\frac{1}{r h_a},\quad \frac{1}{r_c h_b},\quad \frac{1}{r_b h_c};$$
$$\frac{1}{r_c h_a},\quad -\frac{1}{r h_b},\quad \frac{1}{r_a h_c};$$
$$\frac{1}{r_b h_a},\quad \frac{1}{r_a h_b},\quad -\frac{1}{r h_c}.$$

12° Si, par le centre d'un des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle, on mène une parallèle à un côté et l'anti-parallèle à ce même côté, la partie de la parallèle comprise entre les deux autres côtés est égale à la partie de l'anti-parallèle comprise entre ces deux mêmes côtés, c'est-à-dire que, pour le centre du cercle inscrit, on a

$$X_1 = X_2,\quad Y_1 = Y_2,\quad Z_1 = Z_2.$$

Pour le centre du cercle exinscrit tangent au côté BC,

$$X_1 = X_2,\quad Y_1 = -Y_2,\quad Z_1 = -Z_2,\quad \ldots.$$

13° Le lieu des points, pour lesquels on a

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = \text{const.}$$

est une ellipse qui a pour centre le point pour lequel X_2, Y_2, Z_2 sont proportionnels à

$$\frac{\cos A}{a}, \quad \frac{\cos B}{b}, \quad \frac{\cos C}{c}, \quad \text{ou} \quad \cot A, \cot B, \cot C,$$

et pour lequel les coordonnées homogènes sont

$$a(c^2 + b^2 - 3a^2), \quad b(a^2 + c^2 - 3b^2), \quad c(a^2 + b^2 - 3c^2),$$

point pour lequel $X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2$ est un minimum.

14° Pour le centre de gravité, ξ, η, ζ sont proportionnels à

$$\frac{\cos A}{a^2}, \quad \frac{\cos B}{b^2}, \quad \frac{\cos C}{c^2};$$

pour les points dont les coordonnées homogènes sont

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tang} A, & \operatorname{tang} B, & \operatorname{tang} C; \\ -\operatorname{tang} A, & \operatorname{tang} B, & \operatorname{tang} C; \\ \operatorname{tang} A, & -\operatorname{tang} B, & \operatorname{tang} C; \\ \operatorname{tang} A, & \operatorname{tang} B, & -\operatorname{tang} C: \end{array}$$

on a en valeur absolue

$$\xi = \eta = \zeta;$$

il est facile d'étudier de même le lieu des points pour lesquels

$$X_2^2 + Y_2^2 - Z_2^2, \quad X_1^2 + Y_1^2 - Z_1^2, \quad X^2 + Y^2 - Z^2$$

ont une valeur constante, etc., etc.

15° Pour tous les points d'une même anti-parallèle à AB, on a

$$a\xi + b\eta - c\zeta = \text{const.}$$

16° Appelons, avec M. de Longchamps, *points réciproques* deux points O et O_1, tels que, si l'on joint ces points aux trois sommets, les droites ainsi obtenues coupent le côté opposé en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté.

Si, par le point réciproque de l'un des centres des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle, on mène des parallèles aux trois côtés, la longueur que deux de ces parallèles interceptent sur le troisième est la même pour les trois côtés.

C'est-à-dire que, pour ces points, on a

$$X = Y = Z.$$

Les coordonnées homogènes de ces points sont

$$\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}; \quad -\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}; \quad \frac{1}{a^2}, -\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}; \quad \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, -\frac{1}{c^2}.$$

Si l'on a : $bc + ac = ab$, l'un de ces quatre points disparaît à ∞.

Remarquons que, si l'on prend les arguésiens (¹) de ces points, arguésiens dont les coordonnées sont

$$a^2, b^2, c^2; \quad -a^2, b^2, c^2; \quad a^2, -b^2, c^2; \quad a^2, b^2, -c^2;$$

la ligne qui joint l'un d'eux à un sommet divise le côté opposé en deux segments proportionnels aux cubes des côtés adjacents.

Ces théorèmes sont des cas particuliers intéressants de la proposition suivante, qui pourrait à volonté en fournir d'autres pour ainsi dire à l'infini :

17° *Si* $\varphi(X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \xi, \eta, \zeta) = 0$ *est une fonction de degré n des diverses quantités qui entrent dans la parenthèse, le lieu des points* O, *pour lesquels on a* $\varphi = 0$, *sera* en général *une courbe du* $n^{ième}$ *degré.*

La proposition est presque évidente; car, si l'on considère que, les distances du point O aux trois côtés étant α, β, γ, on a

$$X_1 = \frac{a(b\beta + c\gamma)}{2S}, \quad X = \frac{a^2\alpha}{2S}, \quad X_2 = \frac{a(b\gamma + c\beta)}{2S};$$

$$Y_1 = \frac{b(a\alpha + a\gamma)}{2S}, \quad Y = \frac{b^2\beta}{2S}, \quad Y_2 = \frac{b(a\gamma + c\alpha)}{2S};$$

$$Z_1 = \frac{c(a\alpha + b\beta)}{2S}, \quad Z = \frac{c^2\gamma}{2S}, \quad Z_2 = \frac{c(a\beta + b\alpha)}{2S};$$

$$\xi = \frac{\alpha bc \cos A}{S},$$

$$\eta = \frac{\beta ac \cos B}{S},$$

$$\zeta = \frac{\gamma ab \cos C}{S}.$$

(¹) L'arguésien d'un point O est ici le second foyer de la conique inscrite au triangle et qui a pour foyer ce point O.

Le lieu du point O, pour lequel la relation $\varphi = 0$ est satisfaite, sera, en coordonnées homogènes, généralement du $n^{\text{ième}}$ degré, puisque ces quantités sont des fonctions linéaires de α, β, γ, qui peuvent être prises comme coordonnées homogènes. Nous avons dit *généralement* du $n^{\text{ième}}$ degré, car la fonction φ pourrait être constante : c'est le cas des théorèmes 1°, 2°, 3°, 4° (*voir* plus haut).

Le degré pourrait aussi s'abaisser si le coefficient de la plus haute puissance s'annulait identiquement, etc.

Ainsi le lieu des points O, pour lesquels on a

$$X_1 Y_1 Z_1 + XYZ = K^3,$$

représente une ellipse concentrique à l'ellipse minima circonscrite au triangle et homothétique avec elle, c'est-à-dire que le lieu est l'ellipse

$$\frac{\beta\gamma}{a} + \frac{\alpha\gamma}{b} + \frac{\alpha\beta}{c} = H^3,$$

et non une courbe du troisième degré.

Il est clair qu'en prenant, dans le triangle, d'autres éléments x, y, z s'exprimant linéairement en fonction de α, β, γ, on pourrait les ajouter, dans la fonction φ, aux éléments examinés dans cette étude et faire à leur sujet les recherches analogues.

Sur une série à loi alternée; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 20 juin 1884.)

1. Nous rappellerons, en commençant, une formule que nous avons donnée dernièrement dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série, t. III, p. 71).

Considérons une série définie par la loi de récurrence

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$$

et les valeurs des termes initiaux U_0 et U_1, supposées absolument quelconques.

Nous appelons *série fondamentale* de la proposée celle qui s'obtient en conservant la même loi de récurrence

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2},$$

et en prenant pour valeurs des termes initiaux

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1.$$

On sait que le terme u_n d'une telle série est donnée par la formule

$$(1) \qquad u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

α et β étant les racines de l'*équation génératrice*

$$z^2 - az - b = 0$$

[formule (7) de notre Mémoire]. Nous avons démontré [formule (12)] que les termes de la première série peuvent se déduire de ceux de sa série fondamentale par la formule

$$(2) \qquad U_n = U_1 u_n + b U_0 u_{n-1},$$

dont la présente Note n'est qu'une application.

2. L'idée de la série à loi alternée dont nous allons parler nous a été suggérée par la question de Géométrie suivante :

Étant donné un triangle ABC, *on forme le triangle* $A_0B_0C_0$ (¹) *qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle* ABC, *puis le triangle* $A_1B_1C_1$ *qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle* $A_0B_0C_0$, *et ainsi de suite. Trouver les coordonnées des sommets de l'un quelconque* $A_kB_kC_k$ *des triangles de cette suite en fonction des coordonnées des sommets du triangle* ABC.

Nous représenterons les coordonnées de A par x et y, celles de B par x' et y', celles de C par x'' et y'', et, d'une manière générale, celles de A_k par x_k et y_k, celles de B_k par x'_k et y'_k, celles de C_k par x''_k et y''_k. Nous appellerons de plus le triangle $A_kB_kC_k$ *triangle* (k).

(¹) On suppose que le point A_0 est le milieu de BC, le point B_0 le milieu de AC et le point C_0 le milieu de AB.

Il nous suffit de considérer les abscisses, le calcul des ordonnées étant identiquement le même.

Un calcul direct donne

$$x_0 = \frac{x' + x''}{2}, \qquad x'_0 = \frac{x + x''}{2}, \qquad x''_0 = \frac{x + x'}{2};$$

$$x_1 = \frac{2x + x' + x''}{4}, \qquad x'_1 = \frac{x + 2x' + x''}{4}, \qquad x''_1 = \frac{x + x' + 2x''}{4};$$

$$x_2 = \frac{2x + 3x' + 3x''}{8}, \qquad x'_2 = \frac{3x + 2x' + 3x''}{8}, \qquad x''_2 = \frac{3x + 3x' + 2x''}{8};$$

$$x_3 = \frac{6x + 5x' + 5x''}{16}, \qquad x'_3 = \frac{5x + 6x' + 5x''}{16}, \qquad x''_3 = \frac{5x + 5x' + 6x''}{16},$$

....

3. Il suffit d'observer la façon dont se forment méthodiquement ces expressions successives pour en saisir immédiatement la loi.

Pour les dénominateurs, aucune difficulté; au triangle (k) correspond le dénominateur 2^{k+1}.

Pour les numérateurs, la loi est assez longue à énoncer :

Prenons le triangle (k); les numérateurs de x_k, x'_k et x''_k sont des trinômes du premier degré en x, x' et x'', dont les coefficients sont les trois mêmes nombres permutés circulairement. Le plus petit de ces nombres est égal au plus grand moins un, et le troisième est égal au plus grand ou au plus petit, selon que k est pair ou impair. Cette remarque ramène la recherche des trois coefficients à celle du plus grand seulement. Représentant celui-ci par U_k, nous voyons que les trois coefficients sont

$$U_k, \quad U_k, \quad U_k - 1$$

si k est pair, et

$$U_k, \quad U_k - 1, \quad U_k - 1$$

si k est impair.

Comment, dans chaque expression, répartir les trois coefficients entre x, x' et x''? Que k soit pair ou impair, deux des coefficients sont égaux et le troisième différent; nous appellerons ce coefficient le *coefficient à part*. Cela posé, nous pourrons dire que le coefficient à part affecte x dans l'expression de x_k, x' dans l'expression de x'_k et x'' dans l'expression de x''_k.

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances: août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XII. — N° 3.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1884

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois, à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siége est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

---

4. Si donc nous supposons k pair ($k = 2n$), nous avons

$$x_{2n} = \frac{(U_{2n} - 1)x + U_{2n}x' + U_{2n}x''}{2^{2n+1}},$$

que nous pouvons écrire

$$x_{2n} = \frac{U_{2n}(x + x' + x'') - x}{2^{2n+1}}.$$

Posant $x + x' + x'' = S_x$, et supposant que l'on remplace successivement le signe ( ) par l'absence de signe, par le signe prime et par le signe seconde, on aura, d'une manière générale,

$$(3) \qquad x_{2n}^{(\ )} = \frac{U_{2n} S_x - x^{(\ )}}{2^{2n+1}}.$$

Si nous supposons maintenant k impair ($k = 2n + 1$), nous avons

$$x_{2n+1} = \frac{U_{2n+1}x + (U_{2n+1} - 1)x' + (U_{2n+1} - 1)x''}{2^{2n+2}}$$

ou

$$x_{2n+1} = \frac{(U_{2n+1} - 1)(x + x' + x'') + x}{2^{2n+2}};$$

et, d'une manière générale, en employant la même notation que précédemment,

$$(4) \qquad x_{2n+1}^{(\ )} = \frac{(U_{2n+1} - 1)S_x + x^{(\ )}}{2^{2n+2}}.$$

5. Les formules (3) et (4) peuvent être réunies en une seule, plus générale, comprenant à la fois les cas où k est pair et ceux où il est impair; il suffit pour cela de représenter par $R\left(\frac{k}{2}\right)$ le reste de la division de k par 2, reste qui est 1 ou 0; on a alors, quel que soit l'entier k,

$$(5) \qquad x_k^{(\ )} = \frac{\left[U_k - R\left(\frac{k}{2}\right)\right] S_x - (-1)^k x^{(\ )}}{2^{k+1}};$$

par suite, de même

$$(5') \qquad y_k^{(\ )} = \frac{\left[U_k - R\left(\frac{k}{2}\right)\right] S_x - (-1)^k y^{(\ )}}{2^{k+1}}.$$

Les formules (5) et (5′) résoudront complètement le problème lorsque nous aurons obtenu l'expression de U_k en fonction de son rang k, expression que nous allons rechercher maintenant.

6. On aperçoit immédiatement la loi de formation récurrente des nombres U; on a

$$\begin{aligned} U_0 &= 1, \\ U_1 &= 2U_0, \\ U_2 &= 2U_1 - 1, \\ U_3 &= 2U_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et d'une manière générale

$$\begin{aligned} U_{2n} &= 2U_{2n-1} - 1, \\ U_{2n+1} &= 2U_{2n}. \end{aligned}$$

Au lieu de faire le calcul direct des termes de cette série, nous allons généraliser la loi, quitte à remplacer ensuite, dans les résultats obtenus, les coefficients généraux par les valeurs particulières qu'ils ont dans la série précédente.

7. Considérons donc la série définie par la valeur initiale

$$U_0 = a,$$

et les deux formules de récurrence

$$\begin{aligned} U_{2n-1} &= \alpha U_{2n-2} + \beta, \\ U_{2n} &= \gamma U_{2n-1} + \delta, \end{aligned}$$

α, β, γ, δ et a étant absolument quelconques.

Éliminant U_{2n-1} entre les deux formules précédentes, on a

$$U_{2n} = \alpha\gamma U_{2n-2} + \beta\gamma + \delta;$$

de même,

$$U_{2n-2} = \alpha\gamma U_{2n-4} + \beta\gamma + \delta.$$

Retranchant ces deux égalités l'une de l'autre, nous avons

$$U_{2n} = (\alpha\gamma + 1)U_{2n-2} - \alpha\gamma U_{2n-4}.$$

Représentant alors les termes de rang pair de la série par la

lettre P, de façon que

$$P_0 = U_0, \quad P_1 = U_2, \quad \dots, \quad P_n = U_{2n},$$

nous voyons que ces quantités forment à leur tour une série récurrente définie par les valeurs initiales

$$P_0 = a,$$
$$P_1 = a\alpha\gamma + \beta\gamma + \delta$$

et par la formule

$$P_n = (\alpha\gamma + 1)P_{n-1} - \alpha\gamma P_{n-2},$$

c'est-à-dire rentrant dans le type de celles dont il a été parlé au n° **1**.

La série fondamentale de cette série est définie par

$$p_0 = 0,$$
$$p_1 = 1,$$
$$p_n = (\alpha\gamma + 1)p_{n-1} - \alpha\gamma p_{n-2};$$

son équation génératrice est

$$z^2 - (\alpha\gamma + 1)z + \alpha\gamma = 0$$

et a pour racines

$$z_1 = \alpha\gamma,$$
$$z_2 = 1.$$

Par suite, l'application de la formule (1) montre que

$$p_n = \frac{(\alpha\gamma)^n - 1}{\alpha\gamma - 1}.$$

Il en résulte, d'après la formule (2), pour P_n, la valeur

$$P_n = (a\alpha\gamma + \beta\gamma + \delta)\frac{(\alpha\gamma)^n - 1}{\alpha\gamma - 1} - a\alpha\gamma\frac{(\alpha\gamma)^n - 1}{\alpha\gamma - 1}$$

ou, après réduction et remplaçant P_n par U_{2n},

(6) $$U_{2n} = \frac{(\alpha\gamma)^n[a(\alpha\gamma - 1) + \beta\gamma + \delta] - (\beta\gamma + \delta)}{\alpha\gamma - 1}.$$

On a ensuite

(7) $$U_{2n+1} = \alpha U_{2n} + \beta = \frac{(\alpha\gamma)^n\alpha[a(\alpha\gamma - 1) + \beta\gamma + \delta] - (\alpha\delta + \beta)}{\alpha\gamma - 1}.$$

8. Les formules (6) et (7) peuvent encore être réunies en une seule; si l'on représente, comme précédemment, par $R\left(\frac{k}{2}\right)$ le reste de la division de k par 2, et si l'on désigne par $E\left(\frac{k}{2}\right)$ la partie entière du quotient de k par 2, on voit que la formule

$$(8)\qquad U_k = \frac{(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{k}{2}\right)}\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}[a(\alpha\gamma-1)+\beta\gamma+\delta]-\left(\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}\delta+\gamma^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\beta\right)}{\alpha\gamma-1}$$

résume les deux précédentes et convient à toute valeur de k.

Remarquons que, dans le cas où $\alpha=\gamma$, cette formule se simplifie beaucoup, parce qu'on a

$$(\alpha^2)^{E\left(\frac{k}{2}\right)}\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}=\alpha^k;$$

la formule devient donc alors

$$(8')\qquad U_k = \frac{\alpha^k[a(\alpha^2-1)+\beta\alpha+\delta]-\left(\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}\delta+\alpha^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\beta\right)}{\alpha^2-1}.$$

9. Pour la série particulière d'où nous sommes parti, nous avions

$$\alpha=\gamma=2,\quad \beta=0,\quad \delta=-1,\quad a=1;$$

la formule (8′) donne par ces substitutions

$$(9)\qquad U_k=\frac{2^{k+1}+2^{R\left(\frac{k}{2}\right)}}{3}.$$

Cette dernière formule, rapprochée des formules (5) et (5′), résout le problème que nous nous étions proposé en commençant; on a

$$x_k^{(\,)}=\frac{\left[\frac{2^{k+1}+2^{R\left(\frac{k}{2}\right)}}{3}-R\left(\frac{k}{2}\right)\right]S_x-(-1)^k x^{(\,)}}{2^{k+1}},$$

ou

$$(10)\qquad x_k^{(\,)}=\frac{S_x}{3}+\frac{\left[\frac{2^{R\left(\frac{k}{2}\right)}}{3}-R\left(\frac{k}{2}\right)\right]S_x-(-1)^k x^{(\,)}}{2^{k+1}}.$$

De même,

$$y_k^{(\;)} = \frac{S_y}{3} + \frac{\left[\frac{2^{R\left(\frac{k}{2}\right)}}{3} - R\left(\frac{k}{2}\right)\right] S_y - (-1)^k y^{(\;)}}{2^{k+1}}. \tag{10}$$

10. Si nous posons $x_k + x'_k + x''_k = S_{x_k}$, nous avons, en remplaçant successivement dans la formule (10) $x_k^{(\;)}$ par x_k, x'_k et x''_k, et faisant la somme de ces trois expressions

$$S_{x_k} = S_x + \frac{\left[2^{R\left(\frac{k}{2}\right)} - 3R\left(\frac{k}{2}\right) - (-1)^k\right] S_x}{2^{k+1}}.$$

Or on vérifie aisément que, quel que soit l'entier k, pair ou impair, on a identiquement

$$2^{R\left(\frac{k}{2}\right)} - 3R\left(\frac{k}{2}\right) - (-1)^k = 0;$$

par suite,

$$S_{x_k} = S_x;$$

de même,

$$S_{y_k} = S_y.$$

Ces deux égalités montrent que le triangle $A_kB_kC_k$ a même centre de gravité que le triangle ABC, propriété qu'il est bien aisé de démontrer par la Géométrie.

11. Dans l'expression (10) de $x_k^{(\;)}$, le premier terme est indépendant de k; le second terme a un numérateur qui ne contient que des fonctions de k finies, quel que soit k, tandis que son dénominateur croît indéfiniment avec k : ce second terme tend donc vers zéro lorsque k croît au delà de toute limite. Par suite, quand k tend vers l'infini,

$$\lim x_k^{(\;)} = \frac{S_x}{3},$$

$$\lim y_k^{(\;)} = \frac{S_y}{3},$$

c'est-à-dire que la limite commune des positions qu'occupent les trois sommets des triangles que nous considérons, lorsqu'on prolonge indéfiniment l'inscription de ces triangles les uns dans les

autres, est le centre de gravité commun de tous ces triangles, ce qui était bien évident. Nous avons ainsi des sortes de vérifications de nos formules.

12. Nous signalerons une remarque qui résulte de la formule (6). Si l'on pose

$$\alpha\gamma = \lambda, \tag{11}$$

$$\beta\gamma + \delta = \mu, \tag{12}$$

cette formule s'écrit

$$U_{2n} = \frac{\lambda^n [a(\lambda - 1) + \mu] - \mu}{\lambda - 1}. \tag{13}$$

La valeur de U_{2n} ne dépend que de λ, μ, a; si donc on conserve la même valeur a pour le terme initial, et que l'on choisisse pour α, β, γ, δ des systèmes de valeurs quelconques, mais satisfaisant aux relations (11) et (12), on formera autant de séries dans lesquelles les termes de rang pair seront les mêmes, à rang égal.

13. Nous allons donner maintenant la formule générale qui permet de calculer

$$\sum_{i=0}^{i=k} U_i = U_0 + U_1 + \ldots + U_k,$$

quel que soit k, U_i étant le terme dont l'expression résulte de la formule (8) après remplacement de k par i. On a, d'après cette formule,

$$\sum_{i=0}^{i=k} U_i = \frac{a(\alpha\gamma - 1) + \beta\gamma + \delta}{\alpha\gamma - 1} \sum_{i=0}^{i=k} \left[(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{i}{2}\right)} \alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)}\right]$$
$$- \frac{1}{\alpha\gamma - 1} \times \left[\sum_{i=0}^{i=k} \left(\alpha^{R\left(\frac{2}{i}\right)} \delta\right) + \sum_{i=0}^{i=k} \left(\gamma^{R\left(\frac{i+1}{2}\right)} \beta\right)\right]. \tag{14}$$

Évaluons les trois sommes qui figurent au second membre. Pour la première, on voit immédiatement que, si k est pair ($k = 2n$), on a

$$\sum_{i=0}^{i=2n} \left[(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{i}{2}\right)} \alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)}\right] = \frac{(\alpha\gamma)^{n+1} - 1 + \alpha [(\alpha\gamma)^n - 1]}{\alpha\gamma - 1},$$

et si k est impair ($k = 2n + 1$),

$$\sum_{i=0}^{i=2n+1} \left[(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{i}{2}\right)} \alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)}\right] = \frac{(\alpha\gamma)^{n+1} - 1 + \alpha[(\alpha\gamma)^{n+1} - 1]}{\alpha\gamma - 1}.$$

Nous pourrons réunir ces deux formules en une seule, convenant à toute valeur de l'entier k, de la manière suivante :

$$(15) \qquad \sum_{i=0}^{i=k} \left[(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{i}{2}\right)} \alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)}\right] = \frac{(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{k}{2}\right)+1} - 1 + \alpha\left[(\alpha\gamma)^{G\left(\frac{k}{2}\right)} - 1\right]}{\alpha\gamma - 1},$$

en représentant par $G\left(\frac{k}{2}\right)$ la différence $k - E\left(\frac{k}{2}\right)$.

On obtient encore immédiatement

$$\sum_{i=0}^{i=2n} \left(\alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)} \delta\right) = \delta(n + 1 + n\alpha),$$

$$\sum_{i=0}^{i=2n+1} \left(\alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)} \delta\right) = \delta[n + 1 + (n+1)\alpha],$$

formules qui conduisent à la suivante :

$$(16) \qquad \sum_{i=0}^{i=k} \left(\alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)} \delta\right) = \delta\left[E\left(\frac{k}{2}\right) + 1 + \alpha G\left(\frac{k}{2}\right)\right].$$

On trouve de la même façon

$$\sum_{i=0}^{i=2n} \left(\gamma^{R\left(\frac{i+1}{2}\right)} \beta\right) = \beta[n + (n+1)\gamma],$$

$$\sum_{i=0}^{i=2n+1} \left(\gamma^{R\left(\frac{i+1}{2}\right)} \beta\right) = \beta[n + 1 + (n+1)\gamma];$$

d'où l'on conclut que, d'une manière générale,

$$(17) \qquad \sum_{i=0}^{i=k} \left(\gamma^{R\left(\frac{i+1}{2}\right)} \beta\right) = \beta\left\{G\left(\frac{k}{2}\right) + \gamma\left[E\left(\frac{k}{2}\right) + 1\right]\right\}.$$

Le rapprochement des formules (14), (15), (16) et (17) montre que

$$(18)\quad \sum_{i=0}^{i=k} \mathrm{U}_i = \left\{ \frac{\begin{array}{l}[a(\alpha\gamma-1)+\beta\gamma+\delta]\left\{(\alpha\gamma)^{\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)+1}-1+\alpha\left[(\alpha\gamma)^{\mathrm{G}\left(\frac{k}{2}\right)}-1\right]\right\}\\ -(\alpha\gamma-1)\left(\delta\left[\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)+1+\alpha\mathrm{G}\left(\frac{k}{2}\right)\right]+\beta\left\{\mathrm{G}\left(\frac{k}{2}\right)+\gamma\left[\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)+1\right]\right\}\right)\end{array}}{(\alpha\gamma-1)^2} \right\}.$$

Si $\alpha=\gamma$, il est facile de voir que l'on a, quel que soit l'entier k,

$$(\alpha^2)^{\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)+1}-1+\alpha\left[(\alpha^2)^{\mathrm{G}\left(\frac{k}{2}\right)}-1\right]=(\alpha^{k+1}-1)(\alpha+1);$$

par suite, dans ce cas,

$$(18')\quad \sum_{i=0}^{i=k} \mathrm{U}_i = \left\{ \frac{\begin{array}{l}[a(\alpha^2-1)+\alpha\beta+\delta](\alpha^{k+1}-1)(\alpha+1)\\ -(\alpha^2-1)\left(\delta\left[\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)+1+\alpha\mathrm{G}\left(\frac{k}{2}\right)\right]+\beta\left\{\mathrm{G}\left(\frac{k}{2}\right)+\alpha\left[\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)+1\right]\right\}\right)\end{array}}{(\alpha^2-1)^2} \right\}.$$

14. La somme $\sum_{i=0}^{i=k} \mathrm{U}_i$ croît indéfiniment avec k, mais le quotient de cette somme par k, lorsque $\alpha\gamma$ est inférieur à l'unité, tend vers une limite qu'il est facile d'obtenir. En effet, remarquons que, dans ce cas,

$$\lim(\alpha\gamma)^{\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)+1}=\lim(\alpha\gamma)^{\mathrm{G}\left(\frac{k}{2}\right)}=0,$$

et que

$$\lim\frac{\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)}{k}=\lim\frac{\mathrm{G}\left(\frac{k}{2}\right)}{k}=\tfrac{1}{2}.$$

On en conclut que, si $\alpha\gamma<1$, on a, lorsque k tend vers l'infini,

$$(19)\qquad \lim\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{i=k}\mathrm{U}_i\right)=\frac{\delta(1+\alpha)+\beta(1+\gamma)}{2(1-\alpha\gamma)},$$

et, si $\alpha=\gamma$,

$$(19')\qquad \lim\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{i=k}\mathrm{U}_i\right)=\frac{\delta+\beta}{2(1-\alpha)}.$$

15. Nous remarquerons, pour terminer, que des formules dé-

montrées pour la série à loi alternée qui vient d'être étudiée on déduit les formules correspondantes relatives à la suite, non alternée, qui est définie par

$$U_0 = a$$

et

$$U_k = \alpha U_{k-1} + \beta,$$

quel que soit k.

Il suffit pour cela de faire $\beta = \delta$ dans les formules (8′), (18′) et (19′), où l'on a déjà supposé $\alpha = \gamma$.

Dans la formule (8′), nous avons l'expression

$$\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}\delta + \alpha^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\beta,$$

qui, pour $\delta = \beta$, devient

$$\beta\left(\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)} + \alpha^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\right).$$

Or, sur les deux quantités $R\left(\frac{k}{2}\right)$ et $R\left(\frac{k+1}{2}\right)$, il y en a toujours une nulle et l'autre égale à l'unité ; par suite,

$$\beta\left(\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)} + \alpha^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\right) = \beta(1+\alpha),$$

et la formule (8′) donne, après division haut et bas par $1+\alpha$, pour l'expression du terme U_k,

$$(20) \qquad U_k = \frac{\alpha^k[a(\alpha-1)+\beta]-\beta}{\alpha-1}.$$

Dans la formule (18′), où l'on fait $\beta = \delta$, on trouve l'expression

$$E\left(\frac{k}{2}\right) + G\left(\frac{k}{2}\right) + 1 ;$$

or, par définition même de $G\left(\frac{k}{2}\right)$ [formule (15)], on a

$$E\left(\frac{k}{2}\right) + G\left(\frac{k}{2}\right) = k ;$$

par suite, la formule (18′) devient, après division haut et bas, par $(1+\alpha)^2$,

$$(21) \qquad \sum_{i=0}^{i=k} U_i = \frac{[a(\alpha-1)+\beta](\alpha^{k+1}-1)-(\alpha-1)\beta(k+1)}{(\alpha-1)^2}.$$

Enfin, si l'on suppose $\alpha < 1$, la formule (19') montre que l'on a, lorsque k devient infini,

$$\lim\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{i=k} U_i\right) = \frac{\beta}{1-\alpha}. \tag{22}$$

Note sur la théorie des ensembles; par M. Paul Tannery.

(Séance du 20 juin 1884.)

1. Le très important travail : *Une contribution à la théorie des ensembles,* publié par M. Georg Cantor dans le *Journal de Borchardt,* t. 84, 1877, et réédité dans les *Acta mathematica* de M. Mittag-Lefler, 2, 4 (p. 311-328), 1883, contient une lacune évidente que l'auteur n'a pas, au reste, cherché à dissimuler.

Après avoir établi que les ensembles linéaires se groupent en au moins deux classes distinctes, dont la première comprend ceux de même puissance que la série des nombres entiers positifs, et la seconde, ceux de même puissance que l'ensemble de toutes les valeurs réelles entre 0 et 1, M. Georg Cantor admet, *par induction,* qu'il n'y a pas d'autres classes, c'est-à-dire d'autres espèces de puissances pour les ensembles infinis.

Comme il a d'ailleurs établi que la puissance de la première classe est la plus petite (pour les ensembles infinis), il est clair que l'induction dont il s'agit se ramène à deux négations bien distinctes :

1° Il n'y a pas de puissance intermédiaire entre celle de la première classe et celle de la seconde;

2° Il n'y a pas de puissance supérieure à celle de la seconde classe.

Dans ses *Fondements d'une théorie générale des ensembles* (*Annales mathématiques de Leipzig*, t. XXI; *Acta mathematica,* p. 381-408), M. Georg Cantor, pour donner une solution complète et exacte de la question, est entré dans un ordre d'idées où tous les géomètres ne seront peut-être pas également disposés à le suivre; en tout cas, il a seulement annoncé comme prochaine

la démonstration de la première négation, et, tout en maintenant la seconde en ce qui concerne les systèmes de points infinis, il s'est élevé à la conception de classes de nombres supérieurs.

Si on laisse de côté cette dernière conception et si l'on fait également abstraction de toutes celles qui s'y rapportent, il n'en est pas moins certain, après les beaux travaux de M. Georg Cantor, que, pour la seconde négation, il n'y a pas de difficulté réelle; pour la première, au contraire, le défaut d'une démonstration reste sensible.

Il ne faut pas d'ailleurs se tromper sur le caractère que peut avoir cette démonstration. Il s'agit, en somme, de constituer un symbolisme algébrique pour représenter les puissances des ensembles infinis, et c'est bien là ce qu'a essayé de faire M. Georg Cantor, dans le second des deux travaux que j'ai rappelés; il ne s'est arrêté que devant la démonstration rigoureuse de la proposition : que *la puissance de l'ensemble de tous les nombres réels de* o *à* 1 *n'est autre que celle de la seconde classe de nombres.*

Il m'a semblé que le but à poursuivre pouvait être atteint par une voie plus simple, ou du moins plus conforme aux idées généralement admises en ce qui concerne la gradation des ordres d'infinis successifs. On ne s'étonnera donc pas, en pareille matière, si le symbolisme que je proposerai diffère de celui de M. Georg Cantor, et l'on reconnaîtra facilement que la divergence, plus apparente que réelle au fond, tient au mode d'application qu'il fait de son principe de limitation.

En tout cas, la question doit être ramenée, comme je l'ai dit, à l'établissement d'un symbolisme représentant la puissance de la seconde classe par rapport à la première, c'est-à-dire à la puissance de l'ensemble des nombres entiers positifs. La vérité de la succession immédiate de ces deux classes d'ensembles sera donc expressément relative à la forme de ce symbolisme supposé bien établi; je veux dire que la possibilité doit rester ouverte en principe, sinon en fait, d'introduire ultérieurement un nouvel ordre d'idées pour concevoir des classes intermédiaires correspondant à de nouveaux symboles dérivés des premiers, de même que, de la notion d'espaces à n dimensions, n étant entier, on a pu passer à la notion d'espaces à $\frac{p}{q}$ dimensions, sans détruire aucunement

par là la succession logique immédiate entre les espaces à n et à $n+1$ dimensions.

2. D'après la position du problème, il faut évidemment partir de la considération de la puissance de la première classe, celle des ensembles d'objets (points, nombres, etc.) isolés et en nombre infini, pour s'élever de là à la puissance qui se présentera comme étant immédiatement supérieure.

Pour employer le langage de M. Georg Cantor, lorsque chaque dimension d'un ensemble n^{ple} *bien défini* est de la première puissance (n étant un nombre entier positif quelconque), l'ensemble est lui-même de la première puissance, c'est-à-dire qu'on peut le faire correspondre, élément par élément, au moyen d'une opération à sens unique, avec la série des nombres entiers positifs.

Comme l'expression d'ensemble à n dimensions ne se prête point facilement à la représentation, je la remplacerai par celle d'ensemble à n entrées.

Si, en effet, le nombre des entrées, pour les ensembles classés en tables, est nécessairement très restreint dans la pratique, on peut se le représenter facilement comme croissant au delà de toute limite, si, par exemple, chaque élément d'une première table à double entrée correspond d'une façon unique à une autre table à double entrée, et ainsi de suite.

Pour fixer les idées, j'admettrai que l'ordre dans lequel on prend chacune des entrées est bien défini, ou autrement que chacune d'elles sera complètement déterminée, et dans un sens unique, par son rang m, variant de 1 à n inclusivement.

Chaque entrée sera considérée de plus comme se faisant suivant une suite de nombres définie sans ambiguïté. Si ω_m est le nombre des éléments de cette suite pour la $n^{\text{ième}}$ entrée, ce nombre ω_m sera dit l'*extension* de ladite entrée.

Considérons d'abord un ensemble fini d'éléments classés dans une telle table à n entrées, dont les extensions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont finies et connues; le nombre de ces éléments ou la puissance de leur ensemble sera le produit

$$\Omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n,$$

et si l'on suppose d'ailleurs

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \omega,$$

on aura

$$\Omega = \omega^n.$$

Si ω croît indéfiniment, de façon à représenter la puissance de la série des nombres entiers positifs, n étant d'ailleurs un nombre entier positif quelconque, mais déterminé, Ω reste de la première puissance, conformément à la proposition rappelée plus haut.

Il est clair que l'on ne peut maintenir la même conclusion si l'on fait croître en même temps n au delà de toutes limites, et nous apercevons dans ce procédé un moyen d'arriver à nous représenter un ensemble dont la puissance, supérieure à la première, pourra correspondre au symbole ω^ω.

Mais nous reconnaissons immédiatement aussi que nous pouvons également dépasser la première puissance, en faisant croître encore n au delà de toute limite, tandis que la valeur commune de l'extension des entrées reste égale à un nombre entier positif α d'ailleurs quelconque, mais déterminé et par conséquent fini.

Nous arrivons ainsi à un autre symbole α^ω, dont la puissance serait également supérieure à celle de ω, et il est clair d'ailleurs que, dans l'ordre d'idées où nous nous plaçons, il ne peut y avoir d'autre puissance intermédiaire entre celle de ω et celle de α^ω. Nous pourrons dire, par conséquent, que, ω étant de la première puissance, α^ω sera de la seconde; mais il nous faut démontrer que, en réalité, il y a là deux puissances différentes.

Il suffira, à cet égard, de faire voir que l'ensemble des nombres réels compris entre o et 1 est de la même puissance que α^ω, et nous aurons par là même atteint complètement le but que nous nous étions proposé primitivement.

Quant au symbole ω^ω, il nous suffira de faire voir qu'il ne conduit pas à la conception d'une puissance supérieure.

3. La représentation d'un ensemble à n entrées ne souffre évidemment aucune difficulté lorsque l'extension des entrées devient infinie; mais il est clair que nous devons, avant tout, la préciser lorsque le nombre des entrées devient lui-même infini.

Tant que n reste fini, la détermination de chaque élément se

présente comme résultant d'une combinaison définie d'indices

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots \alpha_n,$$

dont chacun est pris dans la suite des nombres de l'entrée correspondante, α_m parmi les ω_m nombres de la n[ième] entrée. L'ordre des entrées est déterminé sans équivoque, et la détermination est complète lorsqu'on est arrivé à la $n^{\text{ième}}$ entrée.

La connaissance des indices détermine ainsi l'élément par une opération à sens unique, et il est également supposé que la connaissance de l'élément permet de déterminer successivement chaque indice par une opération à sens unique.

Si le nombre des entrées est supposé inépuisable, la détermination de chaque élément ne sera, au contraire, jamais complète; mais on peut la considérer comme atteinte à la limite sous la condition suivante.

A chaque combinaison définie $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ doit correspondre, par une opération à sens unique, une valeur numérique x', et n peut être pris assez grand pour que, x étant une valeur numérique correspondant par une opération à sens unique à un élément donné, la différence $x - x'$ soit dans un sens déterminé et puisse tomber au-dessous d'une grandeur assignable quelconque, si petite qu'elle soit.

Sous la même condition, la définition des ensembles de même puissance, telle que la donne M. Georg Cantor, peut être étendue à une correspondance, élément par élément, s'obtenant *à la limite* d'une opération à sens unique *poursuivie indéfiniment*.

Si, par exemple, on a

$$x = \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha^n} + \ldots,$$

et que chacun des numérateurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ puisse prendre toutes les α valeurs entières $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$; si l'on admet, d'autre part, que la détermination poursuivie jusqu'à l'entrée n donne

$$x' = \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha^n},$$

tel que $x - x'$ soit toujours positif et inférieur à $\frac{1}{\alpha^n}$, la condition énoncée ci-dessus sera remplie.

Or l'expression de x ci-dessus n'est autre que la représentation, dans le système de numération dont la base est α, d'un nombre réel quelconque compris entre 0 et 1, et *ne pouvant s'exprimer sous forme finie*. Cette dernière limitation est de rigueur, puisque, si le nombre pouvait s'exprimer sous forme finie, sa détermination pourrait être obtenue par une opération limitée, ce qui est contre l'hypothèse.

4. Ainsi la puissance de l'ensemble des éléments d'une table à un nombre ω indéfini d'entrées, chacune d'extension α, puissance que nous avons représentée par le symbole α^{ω}, sera la même que celle de l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1, et ne pouvant s'exprimer sous forme finie.

Soient, entre 0 et 1, R l'ensemble de tous les nombres réels, F celui de tous les nombres susceptibles d'être exprimés sous forme finie; on a donc l'équivalence

$$R - F \sim \alpha^{\omega}.$$

Mais F est de la première puissance, R est d'une puissance supérieure; l'équivalence ne peut donc subsister que si α^{ω} est lui-même d'une puissance supérieure et égale à celle de R (*voir* le théorème F de M. Georg Cantor, *Acta mathematica,* p. 320).

Donc

$$R \sim \alpha^{\omega}.$$

C. Q. F. D.

En ce qui concerne le symbole ω^{ω}, la représentation donnée par M. Georg Cantor, pour un nombre irrationnel quelconque

$$e = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n - \ddots}}}},$$

correspond à celle d'une table à une infinité d'entrées d'extension indéfinie. Elle indique donc que le symbole ω^{ω} n'a pas une puissance supérieure à celle de α^{ω}, et que, par suite, en restant dans l'ordre d'idée où nous nous sommes placés, il n'y a pas de puissance supérieure à la seconde.

Il convient, toutefois, de remarquer que cette conclusion n'a de valeur véritable que si l'on suppose que le premier des deux symboles dérive du second, alors qu'on établit une relation déterminée entre les nombres distincts qui croissent au delà de toute limite.

On peut facilement établir une représentation analogue à celle que nous avons indiquée pour les tables à ω entrées d'extension α, si l'on suppose, par exemple,

$$\omega = \alpha^\nu \quad \text{et} \quad \omega_1 = \nu\alpha^\nu,$$

α étant un nombre entier positif déterminé quelconque, et ν parcourant la série des nombres entiers positifs.

On a alors

$$\omega^\omega = \alpha^{\nu\alpha^\nu} = \alpha^{\omega_1}.$$

Je ne m'arrêterai pas à cette représentation, qui n'offre aucun intérêt spécial.

Sur l'intégration de quelques équations linéaires au moyen de fonctions doublement périodiques; par E. Goursat.

(Séance du 20 juin 1884.)

1. Depuis les mémorables travaux de M. Hermite sur l'équation de Lamé, les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques ont été étudiées par un grand nombre de géomètres. On connaît le beau théorème de M. Picard, d'après lequel, si l'intégrale générale est uniforme, elle s'exprime au moyen des fonctions Θ. J'examine dans cette Note quelques équations qui offrent une application du théorème de M. Picard; ce sont des équations à coefficients rationnels, telles que la variable et l'intégrale générale peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes doublement périodiques de première ou de deuxième espèce d'un même paramètre. Je me permettrai de signaler entre autres une équation du troisième ordre, qui contient huit nombres entiers quelconques et un paramètre tout à fait arbitraire.



Soit

(1) $$F(y) = 0$$

une équation linéaire d'ordre m à coefficients rationnels et à intégrales régulières, admettant comme points de ramification, pour l'intégrale générale, les points $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ et le point $x = \frac{1}{x'} = \infty$, que nous supposerons toujours un véritable point critique. Admettons que les racines des diverses équations déterminantes fondamentales relatives aux points critiques $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, \infty$ soient commensurables, et en outre que l'intégrale générale ne contienne aucun logarithme dans le domaine de chacun de ces points. Supposons les racines d'une même équation fondamentale réduites à leur plus petit dénominateur commun, et soit m_i ce dénominateur commun pour le point critique a_i et n le dénominateur commun relatif au point $x = \infty$. Si les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_\rho, n$ vérifient la relation

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{1}{m_i} + \frac{1}{n} = \rho - 1,$$

l'équation différentielle

(2) $$\frac{dx}{dz} = g \prod_{i=1}^{i=\rho} (x - a_i)^{1 - \frac{1}{m_i}}$$

aura son intégrale générale uniforme, et l'on sait, d'après les mémorables travaux de MM. Briot et Bouquet, que cette intégrale sera ou une fonction rationnelle, ou une fonction simplement périodique, ou une fonction doublement périodique de z. Laissant de côté les deux premiers cas, supposons que cette intégrale soit doublement périodique et soit $f(z)$ cette fonction. Si dans l'équation (1) on fait le changement de variable $x = f(z)$, l'équation (1) se transforme en une équation à coefficients doublement périodiques, et il est aisé de vérifier que l'intégrale générale est aussi une fonction uniforme de z. En effet, soit z_0 une valeur de z telle que la valeur correspondante x_0 de x soit différente de $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, \infty$; l'intégrale de l'équation (1) est une fonction uniforme de x dans le voisinage de x_0, et par suite une fonction uniforme de z dans le voisinage de z_0. Supposons en second lieu que, pour $z = z_1$,

on ait $x = a_i$; posons $x = a_i + x' m_i$; y sera, par hypothèse, une fonction uniforme de x' dans le voisinage du point $x' = 0$. Mais, si l'on fait cette substitution dans l'équation (2), elle devient

$$\frac{dx'}{dz} = \varphi(x'),$$

$\varphi(x')$ étant holomorphe pour $x' = 0$; donc x', et par suite y, est une fonction uniforme de z dans le domaine du point z_1. On établirait de même que y est une fonction uniforme pour toute valeur finie de z pour laquelle x est infini; c'est donc une fonction uniforme de z dans toute l'étendue du plan. L'équation obtenue en posant $x = f(z)$ dans l'équation (1) rentre donc dans la classe des équations auxquelles s'applique le théorème de M. Picard.

2. On sait que toutes les équations de la forme (2), dont l'intégrale est uniforme et doublement périodique, se ramènent, par une substitution linéaire, aux quatre types suivants :

$$(3) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = gx(1-x)(1-K^2x),$$

$$(4) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^4 = gx^3(x-1)^2,$$

$$(5) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^6 = gx^4(x-1)^3,$$

$$(6) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = gx^2(x-1)^2$$

(*voir* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques*, p. 390 et suivantes); à chacune de ces équations binômes correspondent un certain nombre d'équations linéaires, qu'il est bien facile d'énumérer.

Prenons d'abord le type (3); l'équation linéaire correspondante admettra les quatre points singuliers 0, 1, $\frac{1}{K^2}$, ∞, et les racines des diverses équations fondamentales devront être commensurables et admettre 2 pour dénominateur commun. Comme nous excluons le cas où la différence de deux racines d'une même équation serait un nombre entier, il faudra que cette équation soit du second ordre, et les exposants de discontinuité seront respecti-

vement :

Pour $x = 0$ .... $\lambda + \frac{1}{2}$, λ',

Pour $x = 1$ .... $\mu + \frac{1}{2}$, μ',

Pour $x = \frac{1}{K^2}$ .... $\nu + \frac{1}{2}$, ν',

Pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$ .... $n_1 + \frac{1}{2}$, n,

λ, λ', μ, μ', ν, ν', n, n_1 étant des nombres entiers positifs ou négatifs dont la somme est nulle. On peut toujours, par une transformation facile, supposer $\lambda' = \mu' = \nu' = 0$ et λ, μ, ν positifs. L'équation correspondante sera alors

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & x(1-x)(1-K^2x)\frac{d^2y}{dx^2} \\ & \quad + [K^2(\nu - \tfrac{1}{2})x(1-x) + (\mu - \tfrac{1}{2})x(1-K^2x) + (\tfrac{1}{2} - \lambda)(1-x)(1-K^2x)]\frac{dy}{dx} \\ & = \left[\frac{K^2 n(2n + 2\lambda + 2\mu + 2\nu - 1)}{2} + \frac{h}{4}\right]y; \end{aligned}\right.$$

si l'on y pose $x = \operatorname{sn} z$, elle devient

$$(7\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2K^2\nu \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z} + 2\mu \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z} - 2\lambda \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}\right)\frac{dy}{dz} \\ & \quad = [2n(2u + 2\lambda + + 2\mu + 2\nu - 1)K^2 \operatorname{sn}^2 z + h]y. \end{aligned}\right.$$

Cette équation est identique à l'équation signalée par M. Darboux (*Comptes rendus*, juin 1882), et étudiée depuis par M. de Sparre (*Acta mathematica*, t. III). On le voit facilement, en faisant une transformation de la forme

$$y = \mathrm{Y} \operatorname{sn}^{\alpha} z \operatorname{cn}^{\beta} z \operatorname{dn}^{\gamma}. z.$$

si l'on fait $\lambda = \mu = \nu = 0$, on retrouve l'équation de Lamé.

Les équations linéaires correspondant aux types (4), (5), (6) des équations binômes n'auront que les trois points critiques 0, 1, ∞. Parmi les équations du second ordre, on aura quelques cas particuliers de l'équation d'Euler,

$$(8)\qquad x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0;$$

les quantités α, β, γ auront l'un des systèmes de valeurs ci-

dessous :

$$\alpha = 0, \quad \beta = \tfrac{1}{4}, \quad \gamma = \tfrac{3}{4}.$$
$$\alpha = \tfrac{1}{4}, \quad \beta = \tfrac{1}{2}, \quad \gamma = \tfrac{1}{4},$$
$$\alpha = 0, \quad \beta = \tfrac{1}{3}, \quad \gamma = \tfrac{2}{3},$$
$$\alpha = \tfrac{1}{3}, \quad \beta = \tfrac{2}{3}, \quad \gamma = \tfrac{2}{3},$$
$$\alpha = \frac{n}{6}, \quad \beta = \frac{1-n}{6}, \quad \gamma = \tfrac{2}{3},$$
$$\alpha = \frac{n}{6}, \quad \beta = \frac{5-n}{6}, \quad \gamma = \tfrac{1}{3}.$$

A chacune de ces équations il faut joindre celles que l'on en déduit par les transformations connues qu'admet l'équation d'Euler. Il est à remarquer que, dans chacun de ces cas, l'intégration de l'équation (8) se ramène à des quadratures, et l'intégrale générale s'exprime bien en effet au moyen d'intégrales elliptiques.

Parmi les équations linéaires du troisième ordre, nous rencontrons d'abord un certain nombre d'équations hypergéométriques (voir *Annales de l'Ecole Normale,* t. XII, p. 278). Ce sont les équations de la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2(x-1)\frac{d^3y}{dx^3} + [(3+a_1+a_2+a_3)x-(1+b_1+b_2)]x\frac{d^2y}{dx^2} \\ & + [1+a_1+a_2+a_3+a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)x - b_1b_2]\frac{dy}{dx} + a_1a_2a_3y = 0, \end{aligned}\right.$$

où a_1, a_2, a_3 ont l'un des systèmes de valeurs ci-dessous :

$b_1 = \tfrac{1}{3}$, $b_2 = \tfrac{2}{3}$, ..., $a_1 = 0$, $a_2 = \tfrac{1}{3}$, $a_3 = \tfrac{1}{6}$,
......, ..., ..., $a_1 = \tfrac{5}{6}$, $a_2 = \tfrac{1}{2}$, $a_3 = \tfrac{1}{6}$,
......, ..., ..., $a_1 = \tfrac{2}{3}$, $a_2 = \tfrac{1}{2}$, $a_3 = \tfrac{1}{6}$,
......, ..., ...; $a_1 = 0$, $a_2 = \tfrac{5}{6}$, $a_3 = \tfrac{2}{3}$;

$b_1 = \tfrac{1}{4}$, $b_2 = \tfrac{3}{4}$, $a_1 = \tfrac{1}{4}$, $a_2 = \tfrac{1}{2}$, $a_3 = \tfrac{3}{4}$,
$b_1 = \tfrac{1}{2}$, $b_2 = \tfrac{3}{4}$, $a_1 = 0$, $a_2 = \tfrac{1}{4}$, $a_3 = \tfrac{1}{2}$,
$b_1 = \tfrac{1}{4}$, $b_2 = \tfrac{1}{2}$; $a_1 = 0$; $a_2 = \tfrac{1}{2}$; $a_2 = \tfrac{3}{4}$.

Enfin on rencontre également une équation du troisième ordre ayant la forme suivante :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & x^3(x-1)^3\frac{d^3y}{dx^3} + [\mathrm{A}x + \mathrm{B}(x-1)]\,x^2(x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2} \\ & \qquad + [\mathrm{C}x(x-1) + \mathrm{D}x + \mathrm{E}(1-x)]x(x-1)\frac{dy}{dx} \\ & \qquad - [\mathrm{F}x^2(x-1) + hx(x-1) + \mathrm{H}x + \mathrm{K}(x-1)]y = 0; \end{aligned}\right.$$

les coefficients A, B, C, D, E, F, H, K sont choisis de façon que

les racines des équations déterminantes fondamentales soient

Pour $x = 0$.............. m, $m' + \frac{1}{3}$, $m'' + \frac{2}{3}$,

Pour $x = 1$.............. n, $n' + \frac{1}{3}$, $n'' + \frac{2}{3}$,

Pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$........ p, $p' + \frac{1}{3}$, $p'' + \frac{2}{3}$,

$m, m', m'', n, n', n'', p, p', p''$ désignant des nombres entiers quelconques, dont la somme est nulle. L'équation (10) contient en outre un paramètre h tout à fait arbitraire, ce qui la rapproche de l'équation (7). Si l'on y fait $x = f(z)$, $f(z)$, étant une intégrale de l'équation (6), y sera aussi une fonction uniforme de z, et par suite, quel que soit h, l'intégrale générale s'exprimera au moyen des fonctions Θ.

3. L'analogie entre l'équation (10) et l'équation de Lamé peut encore être poussée plus loin; c'est ce qui résulte de la propriété suivante, que nous allons maintenant démontrer : *Le produit de trois intégrales convenablement choisies, et en général distinctes, est une fonction uniforme dans toute l'étendue du plan, et par suite un polynôme ou une fraction rationnelle.*

Dans le domaine de chacun des points $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$, l'équation (10) admet trois intégrales particulières, qui sont respectivement multipliées par les facteurs 1, α, α^2 (α, α^2 désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité), lorsque la variable décrit un lacet autour de ce point. Soit y_1, y_2, y_3 le système fondamental du point $x = 0$ et z_1, z_2, z_3 le système fondamental du point $x = 1$; de telle sorte que l'on ait, dans le domaine du point $x = 0$,

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = x^{\frac{1}{3}} \varphi_2(x), \quad y_3 = x^{\frac{2}{3}} \varphi_3(x),$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant uniformes dans ce domaine, et de même, dans le domaine du point $x = 1$,

$$z_1 = \psi_1(x), \quad z_2 = (x-1)^{\frac{1}{3}} \psi_2(x), \quad z_3 = (x-1)^{\frac{2}{3}} \psi_3(x),$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant uniformes pour $x = 1$. Considérons pour un moment les lignes indéfinies $-\infty$ —— 0, 1 —— $+\infty$ comme des coupures; entre les deux systèmes fondamentaux d'intégrales,

il existe des relations linéaires telles que

$$(11) \qquad \begin{cases} y_1 = a z_1 + b z_2 + c z_3, \\ y_2 = a' z_1 + b' z_2 + c' z_3, \\ y_3 = a'' z_1 + b'' z_2 + c'' z_3, \end{cases}$$

le déterminant des coefficients

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

étant différent de zéro. Ces coefficients doivent être tels, qu'après avoir fait décrire à la variable un contour fermé enveloppant les points $x = 0$, $x = 1$, il y ait trois intégrales particulières qui se reproduisent multipliées respectivement par 1, α, α^2. Cette condition entraîne entre ces coefficients deux relations qu'il serait facile de former. D'autre part, les intégrales $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ ne sont déterminées qu'à un facteur constant près. On conçoit donc qu'on puisse mettre les relations (11) sous une forme telle qu'elles ne contiennent plus que deux paramètres arbitraires. Il est commode pour cela de remplacer les systèmes fondamentaux par deux autres systèmes déterminés comme il suit.

Désignant par A, B, C trois constantes indéterminées, posons

$$Y = A y_1 + B y_2 + C y_3;$$

proposons-nous de déterminer A, B, C de telle façon que l'intégrale Y se reproduise multipliée par un facteur constant ω quand la variable x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x = 1$ suivi d'un lacet dans le sens inverse autour du point $x = 0$; chemin que, pour abréger, je désignerai désormais par L. Si Y se change en ωY après que la variable a décrit un pareil chemin, il est clair que l'on devra arriver à la même intégrale, soit lorsqu'on fait décrire à la variable un lacet dans le sens direct autour du point $x = 1$, en prenant au départ l'intégrale Y, soit lorsqu'on fait décrire à la variable un lacet dans le sens direct autour du point $x = 0$, en prenant au départ l'intégrale ωY. Dans le premier cas, on aboutit à l'intégrale

$$A(a z_1 + b \alpha z_2 + c \alpha^2 z_3) + B(a' z_1 + b' \alpha z_2 + c' \alpha^2 z_3) + C(a'' z_1 + b'' \alpha z_2 + c'' \alpha^2 z_3);$$

dans le second cas, on est conduit à l'intégrale

$$\omega(Ay_1+B\alpha y_2+C\alpha^2 y_3)=\omega(Aa+Ba'\alpha+Ca''\alpha^2)z_1+\omega(Ab+B\alpha b'+C\alpha^2 b'')z_2 + \omega(Ac+B\alpha c'+C\alpha^2 c'')z_3.$$

Il faudra donc que l'on ait

$$(12)\quad \frac{Aa+Ba'+Ca''}{Aa+Ba'\alpha+Ca''\alpha^2}=\frac{\alpha(Ab+Bb'+Cb'')}{Ab+B\alpha b'+C\alpha^2 b''}=\frac{\alpha^2(Ac+Bc'+Cb'')}{Ac+B\alpha c'+C\alpha^2 c''}=\omega;$$

l'élimination de A, B, C conduit à l'équation

$$(13)\quad \varphi(\omega)=\begin{vmatrix} a-a\omega & a'(1-\alpha\omega) & a''(1-\alpha^2\omega) \\ b(\alpha-\omega) & b'(\alpha-\alpha\omega) & b''(\alpha-\alpha^2\omega) \\ c(\alpha^2-\omega) & c'(\alpha^2-\alpha\omega) & c''(\alpha^2-\alpha^2\omega) \end{vmatrix}=\Delta+\theta\omega+\theta'\omega^2-\Delta\omega^3=0.$$

On a ainsi pour déterminer ω une équation du troisième degré, dans laquelle le produit des racines est égal à l'unité; d'après la signification des racines de cette équation, on sait qu'elle serait la même, quel que soit le système fondamental dont on partirait pour l'obtenir. Soit ω_1 une racine de cette équation; il y correspond une intégrale particulière Y_1 jouissant de la propriété précédente,

$$Y_1=Ay_1+By_2+Cy_3=A_1z_1+B_1z_2+C_1z_3$$

ou

$$A_1=Aa+Ba'+Ca'',$$
$$B_1=Ab+Bb'+Cb'',$$
$$C_1=Ac+Bc'+Cc''.$$

Partons d'un point quelconque du plan avec l'intégrale Y_1 et faisons décrire à la variable deux lacets successifs dans le sens direct autour de l'origine; on obtient ainsi deux nouvelles intégrales

$$Y_2=Ay_1+B\alpha y_2+C\alpha^2 y_3,$$
$$Y_3=Ay_1+B\alpha^2 y_2+C\alpha y_3.$$

De même, en faisant décrire à la variable plusieurs lacets successifs dans le sens direct autour du point $x=1$, on obtient deux nouvelles intégrales

$$Z_2=A_1z_1+B_1\alpha z_2+C_1\alpha^2 z_3,$$
$$Z_3=A_1z_1+B_1\alpha^2 z_2+C_1\alpha z_3.$$

Les trois intégrales Y_1, Y_2, Y_3 forment un système fondamental pourvu que le produit ABC soit différent de zéro. De même, le système Y_1, Z_2, Z_3 est fondamental, si $A_1 B_1 C_1$ n'est pas nul. Supposons que ces deux produits soient nuls en même temps. Il peut arriver que deux des trois quantités A, B, C soient nulles en même temps, ou qu'une seule soit nulle.

Prenons d'abord le cas où deux des trois quantités A, B, C seraient nulles à la fois; soit, par exemple, $B = C = 0$. Les relations (12) deviennent

$$\frac{Aa}{Aa} = \frac{\alpha A b'}{Ab} = \frac{\alpha^2 A c}{Ac};$$

les trois coefficients a, b, c ne peuvent être nuls ensemble. Si a est différent de zéro, on aura $b = c = 0$ et, par suite, $y_1 = a z_1$; si b n'est pas nul, on aura $a = c = 0$ et $y_1 = b z_2$, ... On voit donc que, dans ce cas, y_1^3 est une fonction uniforme et par suite une fonction rationnelle, et l'équation (10) ne sera pas *irréductible*. Comme les points $x = 0$, $x = 1$ jouent un rôle identique, il en serait de même si deux des trois quantités A_1, B_1, C_1 étaient nulles.

Supposons en second lieu qu'une seule des quantités A, B, C soit nulle ainsi qu'une seule des quantités A_1, B_1, C_1. Soit, par exemple, $C = C_1 = 0$, $AB \neq 0$, $A_1 B_1 \neq 0$. On aura

$$\begin{aligned} Y_1 &= A y_1 + B y_2 = A_1 z_1 + B_1 z_2, \\ Y_2 &= A y_1 + B \alpha y_2, \\ Z_2 &= A_1 z_1 + B_1 \alpha z_2; \end{aligned}$$

mais, d'après la façon dont nous avons choisi l'intégrale Y_1, on a $Z_2 = \omega_1 Y_2 \omega_1 = Y_2$, c'est-à-dire

$$\omega_1 (A y_1 + B \alpha y_2) = + A_1 z_1 B_1 \alpha z_2,$$

et cette relation, jointe à la précédente, nous montre que y_1 et y_2 constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes L'équation (10) ne sera pas encore *irréductible*.

Laissant de côté ces cas particuliers, qui seront examinés plus loin, nous voyons que, si l'équation (10) n'admet pas d'intégrales communes avec une équation linéaire d'ordre moindre à coeffi-

cients rationnels, les deux produits ABC, $A_1B_1C_1$ ne pourront être nuls en même temps. Comme rien ne distingue les deux points $x=0$, $x=1$, je supposerai que le produit ABC est différent de zéro; les intégrales Y_1, Y_2, Y_3 forment alors un système fondamental, et ces intégrales se permutent circulairement lorsque la variable tourne autour du point $x=0$. Lorsque la variable décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x=1$, nous savons déjà que Y_1 se change en $\omega_1 Y_2$; quant aux intégrales Y_2 et Y_3, elles se changent respectivement en $aY_1+bY_2+cY_3$, $a'Y_1+b'Y_2+c'Y_3$, les coefficients a, b, c, a', b', c' n'étant plus les mêmes que tout à l'heure. Le groupe de l'équation (10) dérive donc de deux substitutions fondamentales de la forme suivante et des substitutions inverses :

$$S(Y_1, Y_2, Y_3 : Y_2, Y_3, Y_1),$$
$$S'(Y_1, Y_2, Y_3 : \omega_1 Y_2, aY_1+bY_2+cY_3, a'Y_1+b'Y_2+c'Y_3).$$

Soient λ, μ, ν trois constantes indéterminées; par la substitution S′, l'intégrale $\lambda Y_1+\mu Y_2+\nu Y_3$ se change en

$$(\mu a+\nu a')Y_1+(\lambda\omega_1+\mu b+\nu b')Y_2+(\mu c+\nu c')Y_3.$$

Pour avoir les intégrales qui sont multipliées par un facteur constant σ, par cette substitution, on est conduit aux équations

$$\begin{aligned} -\lambda\sigma+\mu a+\nu a'&=0,\\ \lambda\omega_1+\mu(b-\sigma)+\nu b'&=0,\\ \mu c+\nu(c'-\sigma)&=0, \end{aligned}$$

et l'élimination de λ, μ, ν conduit à l'équation

$$(14)\qquad \sigma^3-(b+c')\sigma^2+(bc'-b'c-a\omega_1)\sigma-\omega_1(a'c-ac')=0.$$

De même, les substitutions S′ et S, appliquées successivement à l'intégrale $\lambda Y_1+\mu Y_2+\nu Y_3$, la changent en

$$(\mu c+\nu c')Y_1+(\mu a+\nu a')Y_2+(\lambda\omega_1+\mu b+\nu b')Y_3,$$

et si l'on cherche les intégrales qui sont multipliées par σ après ces deux substitutions, on est conduit aux équations

$$\begin{aligned} -\lambda\sigma+\mu c+\nu c'&=0,\\ \mu(a-\sigma)+\nu a'&=0,\\ \lambda\omega_1+\mu b+\nu(b'-\sigma)&=0; \end{aligned}$$

l'élimination de λ, μ, ν conduit de même à l'équation

(15) $$\sigma^3 - (a + b')\sigma^2 + (ab' - ba' - c'\omega_1)\sigma - \omega_1(a'c - ac') = 0.$$

D'après les propriétés de l'équation (10), les deux équations (14) et (15) doivent se réduire à $\sigma^3 - 1 = 0$; ce qui exige que l'on ait

(16) $$\begin{cases} b + c' = 0, & bc' - cb' = a\omega_1, \\ a + b' = 0, & ab' - ba' = c'\omega_1, \quad \omega_1(a'c - ac') = 1. \end{cases}$$

Si les deux quantités b et b' sont différentes de zéro, la substitution S', appliquée à l'intégrale $b'Y_2 - bY_3$, la change en

$$(ab' - ba')Y_1 - (bc' - b'c)Y_3,$$

ou, d'après les formules (16), en

$$\omega_1(cY_1 - aY_3) = \omega_1(b'Y_3 - bY_1);$$

la substitution S^{-1}, appliquée ensuite la change en

$$\omega_1(b'Y_2 - bY_3).$$

Il existera donc deux intégrales distinctes Y_1 et $b'Y_2 - bY_3$, qui sont multipliées par le facteur constant ω_1 lorsque la variable décrit le chemin L; ce qui exige que ω_1 soit racine double de l'équation $\varphi(\omega) = 0$. Écartons d'abord le cas particulier où $\varphi(\omega)$ se réduirait à $(\omega - 1)^3$: nous pourrons supposer que l'on a pris pour ω_1 une racine simple de cette équation, et il faudra que l'on ait $b = b' = 0$. Les équations (16) donnent alors $a = 0$, $c' = 0$, $a'c\omega_1 = 1$. Pour l'uniformité des notations, posons $c = \omega_2$, $a' = \omega_3$; les substitutions S et S' auront les formes suivantes :

(17) $$\begin{cases} S(Y_1, Y_2, Y_3 : Y_2, Y_3, Y_1), \\ S'(Y_1, Y_2, Y_3 : \omega_1 Y_2, \omega_2 Y_3, \omega_3 Y_1), \end{cases}$$

où ω_1, ω_2, ω_3 sont précisément les racines de l'équation $\varphi(\omega) = 0$, racines qui vérifient la relation $\omega_1\omega_2\omega_3 = 1$.

Je dis qu'il en est de même dans le cas où $\varphi(\omega)$ admet la racine triple $\omega = 1$. En effet, supposons qu'il en soit ainsi et reprenons le raisonnement précédent. Il n'y a rien à changer si les deux quantités b et b' sont nulles; je remarque que, d'après les relations (16), si l'une d'elles est nulle, il en est de même de la seconde.

Supposons-les toutes différentes de zéro, et posons

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \quad b'^2 Y_1 - bb' Y_2 + b^2 Y_3, \\
Z_2 &= \quad b^2 Y_1 + b'^2 Y_2 - bb' Y_3, \\
Z_3 &= - bb' Y_1 + b^2 Y_2 + b'^2 Y_3;
\end{aligned}$$

Z_1, Z_2, Z_3 forment un système fondamental, pourvu que $b^3 + b'^3$ soit différent de zéro. Supposons cette condition remplie; nous venons de voir que la substitution S′ change Z_1 en Z_2 et Z_2 en Z_3, et le groupe de l'équation dérivera des deux substitutions

$$\begin{aligned}
&S(Z_1, Z_2, Z_3 : Z_2, Z_3, Z_1), \\
&S'(Z_1, Z_2, Z_3 : Z_2, Z_3, aZ_1 + bZ_2 + cZ_3).
\end{aligned}$$

On obtiendra, comme plus haut, les coefficients a, b, c en écrivant que la substitution S′ reproduit trois intégrales particulières multipliées par les facteurs 1, α, α^2, et l'on trouve qu'il faut prendre $a = 1$, $b = c = 0$. Ces substitutions S et S′ sont par conséquent de la forme (17).

Si l'on avait $b^3 + b'^3 = 0$, les trois intégrales Z_1, Z_2, Z_3 seraient identiques, et Z_1^3 serait une fonction uniforme.

En résumé, *toutes les fois que l'équation* (10) *est irréductible, le groupe de l'équation dérive de deux substitutions de la forme* (17), Y_1, Y_2, Y_3 *désignant trois intégrales convenablement choisies formant un système fondamental.*

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement que le produit $Y_1 Y_2 Y_3$ est uniforme, d'après la relation $\omega_1 \omega_2 \omega_3 = 1$. On voit aussi que les dérivées logarithmiques

$$\frac{1}{Y_1}\frac{dY_1}{dx}, \quad \frac{1}{Y_2}\frac{dY_2}{dx}, \quad \frac{1}{Y_3}\frac{dY_3}{dx}$$

ne peuvent que revenir à leurs valeurs initiales ou s'échanger entre elles lorsque la variable décrit un contour fermé quelconque; ces dérivées sont donc racines d'une équation du troisième degré, dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de la variable. Soit $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dx} = U$; la relation $f(U, x) = 0$ sera du genre *un*, car la fonction U est ramifiée de la même manière que la fonction algé-

brique u définie par l'équation

$$u^3 = x(x-1).$$

L'intégrale générale de l'équation (10) s'exprimera donc au moyen d'intégrales elliptiques de première et de troisième espèce, ce qui est bien conforme au théorème de M. Picard.

Pour effectuer l'intégration, on pourra employer une méthode analogue à l'une des méthodes employées par M. Hermite pour l'équation de Lamé (*Annali di Matematica*, t. IX, 2e série). On peut toujours, par une transformation facile, supposer que m et n sont nuls, et que m', n', m'', n'' sont nuls ou positifs ; cette transformation effectuée, le produit $Y_1 Y_2 Y_3$, restant fini dans toute l'étendue du plan, ne pourra être qu'un polynôme, et il est aisé d'avoir *a priori* le degré de ce polynôme d'après la forme des intégrales dans le voisinage du point $x = \infty$. Ce produit satisfait à une équation linéaire du dixième ordre que l'on sait former, et l'on pourra toujours l'obtenir sans autre difficulté que la longueur des calculs. Une fois ce produit connu, M. Halphen a montré comment on pouvait achever l'intégration (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 1408 et 1541 ; t. XCVIII, p. 134); l'application de sa méthode conduit en effet à des quadratures.

4. Supposons maintenant que l'équation (10) admette une intégrale commune avec une équation linéaire à coefficients rationnels d'ordre inférieur au troisième. Cette équation pourra être du premier ou du second ordre, mais nous allons voir que le second cas se ramène au premier.

En effet, si l'équation (10) admet toutes les intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels $\Phi(y) = 0$, dans le domaine de chacun des points 0, 1, ∞, l'équation $\Phi(y) = 0$ devra admettre deux intégrales qui se reproduisent multipliées par deux des facteurs 1, α, α^2, lorsque la variable décrit un lacet autour de ce point, et, dans le domaine de tout autre point, l'intégrale sera uniforme. On peut toujours, en multipliant ces intégrales par un facteur de la forme $x^p(x-1)^q$, où p et q ont l'une des valeurs 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, supposer que les multiplicateurs relatifs aux points 0 et 1 sont 1 et α. Soient y_1 et y_2 les intégrales qui se comportent d'une manière simple dans le domaine du point $x = 0$

et z_1, z_2 celles qui se comportent d'une manière simple dans le domaine du point $x = 1$. Entre ces intégrales il existe deux relations linéaires, telles que

$$(18) \qquad \begin{cases} y_1 = az_1 + bz_2, \\ y_2 = cz_1 + dz_2; \end{cases}$$

le déterminant $ad - bc$ étant différent de zéro, comme z_1 n'est déterminé qu'à un facteur constant près, on peut supposer $ad - bc = 1$. Les équations (10) peuvent aussi s'écrire

$$\begin{cases} z_1 = dy_1 - by_2, \\ z_2 = ay_1 - cy_2. \end{cases}$$

Faisons décrire à la variable deux lacets successifs dans le sens direct autour des points $x = 0$, $x = 1$; y_1 se change en $az_1 + b\alpha z_2$ ou en

$$a(dy_1 - by_2) + ba(ay_2 - cy_1) = (ad - \alpha bc)y_1 + (\alpha - 1)aby_2.$$

De même, y_2 se change en $\alpha(cz_1 + dz_2)$, puis en $\alpha(cz_1 + d\alpha z_2)$ ou en

$$\alpha c(dy_1 - by_2) + d\alpha^2(ay_2 - cy_1) = cd(\alpha - \alpha^2)y_1 + (\alpha^2 ad - \alpha bc)y_2.$$

Il en résulte que $\lambda y_1 + \mu y_2$ se change en

$$[\lambda(ad - \alpha bc) + \mu cd(\alpha - \alpha^2)]y_1 + [\lambda(\alpha - 1)ab + \mu(\alpha^2 ad - \alpha bc)]y_2;$$

pour que cette intégrale se reproduise à un facteur constant près σ, il faudra que l'on ait

$$\begin{gathered} \lambda(ad - \alpha bc - \sigma) + \mu cd(\alpha - \alpha^2) = 0, \\ \lambda(\alpha - 1)ab + \mu(\alpha^2 ad - \alpha bc - \sigma) = 0 \end{gathered}$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} ad - \alpha bc - \sigma & cd(\alpha - \alpha^2) \\ (\alpha - 1)ab & \alpha^2 ad - \alpha bc - \sigma \end{vmatrix} = \sigma^2 + \sigma\alpha(ad + 2bc) + \alpha^2 = 0.$$

Les racines de cette équation doivent être distinctes et avoir l'une des valeurs 1, α, α^2; ces racines seront par suite 1 et α^2, ce qui exige que l'on ait

$$1 + \alpha(ad + 2bc) + \alpha^2 = 0$$

ou

$$ad + 2bc = 1.$$

Cette relation, jointe à la condition $ad - bc = 1$, donne $3bc = 0$. Il en résulte que l'équation $\Phi(y) = 0$ admet elle-même une intégrale commune avec une équation du premier ordre à coefficients rationnels. Ainsi, *si l'équation* (10) *n'est pas irréductible, elle admet pour intégrale la racine cubique d'une fraction rationnelle.*

On peut encore se proposer dans ce cas de former le groupe de l'équation (10). En multipliant toutes les intégrales par un facteur de la forme $x^p(x-1)^q$, on peut supposer qu'elle admet une intégrale uniforme dans tout le plan. Les substitutions fondamentales du groupe auront la forme suivante :

$$S(y_1, y_2, y_3 : y_1, \alpha y_2, \alpha^2 y_3),$$
$$S'(y_1, y_2, y_3 : y_1, a y_1 + b y_2 + c y_3, a' y_1 + b' y_2 + c' y_3).$$

Pour déterminer les coefficients a, b, c, a', b', c', on emploie la méthode dont je me suis déjà servi plusieurs fois; on trouve ainsi les conditions

$$b + c' + 1 = 0, \quad bc' - b'c = 1, \quad b\alpha + c'\alpha^2 + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$b = \alpha, \quad c' = \alpha^2, \quad b'c = 0.$$

Cette dernière donne soit $b' = 0$, soit $c = 0$; comme rien ne distingue les deux intégrales y_2, y_3, nous prendrons $c = 0$. Par suite, le groupe de l'équation (10) dérive dans ce cas de deux substitutions de la forme suivante :

$$(19) \qquad \begin{cases} S(y_1, y_2, y_3 : y_1, \alpha y_2, \alpha^2 y_3), \\ S'(y_1, y_2, y_3 : y_1, a y_1 + \alpha y_2, a' y_1 + b' y_2 + \alpha^2 y_3), \end{cases}$$

a, a', b' étant trois coefficients indéterminés.

5. Il est facile de déduire de là la forme analytique de l'intégrale générale. Nous savons déjà que y_1 est une fonction rationnelle. Si $a = 0$, y_2 sera la racine cubique d'une fonction rationnelle; si a n'est pas nul, le rapport $\frac{y_2}{y_1}$ admet en chaque point du

plan une infinité de valeurs comprises dans la formule

$$\alpha^m\left(\frac{y_2}{y_1}\right)+C;$$

sa dérivée $\frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}$ sera donc une fonction algébrique ramifiée comme la fonction $u=\sqrt[3]{x(x-1)}$, et par suite $\frac{y_2}{y_1}$ sera une intégrale elliptique.

Tout pareillement, on reconnaît que si les deux coefficients a' et b' sont nuls, y_3 est la racine cubique d'une fraction rationnelle. Si b' est nul, sans que a' le soit, le rapport $\frac{y_3}{y_1}$ est une intégrale elliptique; si a et b' sont nuls et a' différent de zéro, $\frac{y_3}{y_2}$ sera une intégrale elliptique. Si a et b' sont tous deux différents de zéro, en posant

$$U=\frac{y_3}{y_1}-\frac{b'}{2a\alpha}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2,$$

on reconnaît que la fonction U admet en chaque point une infinité de valeurs qui sont comprises dans la formule $\alpha^m U+C$; U est donc une intégrale elliptique.

6. Si l'on suppose nuls tous les nombres m et n, l'équation (10) prend la forme

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2(x-1)^2\frac{d^3y}{dx^3}+(4x-2)x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}\\ &\quad+\left[\frac{2}{q}(1-10x+10x^2)+\left(pp'+pp''+p'p''+p+\frac{p'}{3}+\frac{p''}{3}\right)x(x-1)\right]\frac{dy}{dx}\\ &\qquad\qquad+\left[p(p'+\tfrac{1}{3})(p''+\tfrac{2}{3})x+h\right]y=0,\end{aligned}\right.$$

p, p', p'' désignant trois nombres entiers dont la somme est nulle. Considérons l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^3=6\sqrt{3}(1+K^2)^{\frac{3}{2}}x^2(x-1)^2,$$

qui admet l'intégrale

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+K^2}\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z,$$

le module K^2 ayant la valeur particulière donnée par l'équation

$$[(HK^2)^2] - 3K^2 = 0.$$

Si dans l'équation (20) on remplace x par la fonction précédente, on trouve l'équation transformée

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^3y}{dz^3} + 3(1+K^2)\left(pp'+pp''+p'p''+p+\frac{2p'}{3}+\frac{p''}{3}\right)[(1+K^2)\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z - 1]\frac{dy}{dz} \\ &\quad + 6\sqrt{3}(1+K^2)^{\frac{3}{2}}\left[p(p'+\tfrac{1}{3})(p''+\tfrac{2}{3})\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+K^2}\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z\right)+h\right]y = 0.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier où les trois nombres p, p', p'' sont nuls, cette équation se réduit à

$$\frac{d^3y}{dz^3} + 6\sqrt{3}(1+K^2)^{\frac{3}{2}}hy = 0;$$

il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (20) sera

$$y = C_1 e^{\sqrt[3]{-h}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}} + C_2 e^{\alpha\sqrt[3]{-h}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}} + C_3 e^{\alpha^2\sqrt[3]{-h}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}},$$

si h n'est pas nul, et, si $h = 0$,

$$y = C_1 + C_2\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} + C_3\left(\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}\right)^2.$$

Il y a encore deux autres cas où l'on peut effectuer l'intégration : c'est d'abord celui où l'on a $p = 1$, $p' = 0$, $p'' = -1$; en tenant compte de la valeur particulière du module K^2, l'équation (21) peut s'écrire

$$\frac{d^3y}{dz^3} + (1 + K^2 - 3K^2\operatorname{sn}^2 z)\frac{dy}{dz} + (h_1 - 3K^2\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z)y = 0.$$

Cette équation rentre dans une catéégorie d'équations du troisième ordre, dont M. Mittag-Leffler a fait connaître l'intégrale générale [*Ueber die Integration, etc.* (*Acta Societatis Fennicæ,* t. XII, p. 65. *Comptes rendus,* 22 mars et 5 avril 1880]. L'équation dont il s'agit ici admet les trois intégrales particulières

$$y = \frac{H(z+\omega)}{\Theta(z)}e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}z}.$$

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins........................	4,60
De cinq à neuf volumes........................	5,00
Moins de cinq volumes........................	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XII. – N° 4.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois, à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

ω étant donné par l'équation

$$h_1 + K^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega = 0.$$

Enfin, si l'on suppose $p = 0$, $p' = 1$, $p'' = -1$, l'équation (21) devient

$$\frac{d^3y}{dz^3} + [2(1+K^2) - 6K^2 \operatorname{sn} z^2] \frac{dy}{dz} + h_1 y = 0;$$

c'est un cas particulier d'une équation intégrée par M. Picard (*Comptes rendus*, t. XC, p. 128).

Dans le cas général, la méthode d'intégration indiquée plus haut pour l'équation (10) semble devoir conduire à des calculs compliqués. En premier lieu, cette méthode exige la formation d'une équation du dixième ordre, et la recherche d'un polynôme satisfaisant à cette équation. Connaissant ce polynôme, l'application de la méthode de M. Halphen paraît elle-même exiger d'assez longs calculs. Peut-être pourrait-on opérer plus simplement en cherchant la dérivée logarithmique; si dans l'équation (10) on pose $y = e^{\int u dx}$, on est conduit à une équation du second ordre en u, qui admet, d'après ce que nous avons vu, une intégrale algébrique. Soit

$$P u^3 + Q u^2 + R u + S = 0$$

l'équation qui donne cette intégrale algébrique; P, Q, R, S sont des fonctions entières de x, dont il est aisé d'avoir le degré, ou du moins une limite supérieure de ce degré. Soit $F(x)$ le polynôme, produit des trois intégrales Y_1, Y_2, Y_3; la fonction u ne peut avoir que des pôles du premier ordre, et ces pôles seront, outre les points $0, 1, \infty$, les racines de $F(x) = 0$; comme on peut trouver *a priori* le degré de $F(x)$, P, Q, R, S ne contiendront qu'un nombre limité de coefficients indéterminés, et tout se réduira à un calcul d'identification.

L'équation (21) peut s'écrire, en tenant compte de la valeur particulière du module,

$$\frac{d^3y}{dz^3} + (3pp' + 3pp'' + 3p'p'' + 3p + 2p' + p'')[3K^2 \operatorname{sn}^2 z - (1+K^2)] \frac{dy}{dz}$$
$$+ [3p(3p'+2)(3p''+2)K^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z + h_1] y = 0.$$

Quelle que soit la valeur du module K^2, cette équation admet les points critiques $z = iK' + 2mK + 2m'iK'$, et les racines de l'équation déterminante sont $3p$, $3p'+1$, $3p''+2$; mais on sait que, pour



que l'intégrale générale soit uniforme, deux autres conditions subsidiaires doivent être remplies. Lorsque K^2 a la valeur particulière définie par l'équation $[(HK^2)^2] - 3K^2 = 0$, nous venons de voir qu'elles sont toujours remplies; mais, dans les deux cas particuliers que nous avons examinés, elles le sont aussi, quel que soit K^2. Il y a donc lieu de se demander si l'équation précédente n'aurait pas son intégrale uniforme, quel que soit le module K^2, et les nombres entiers p, p', p'' vérifiant la relation $p + p' + p'' = 0$. Il ne semble pas qu'aucune méthode simple puisse être appliquée au cas général.

Sur la droite moyenne d'un système de droites quelconques situées dans un plan; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 18 juillet 1884.)

1. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$, p droites quelconques données dans un plan; supposons qu'une droite se déplace dans ce plan en restant parallèle à une direction fixe Δ, et coupe à chaque instant les p droites données en des points que nous désignerons par a_1, $a_2, \ldots, a_p$; le centre des moyennes distances g des points a_1, $a_2, \ldots, a_p$ décrit une droite G.

Nous dirons que *la droite* G *est la droite moyenne des droites* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *relativement à la direction* Δ.

Si les droites $A_1, A_2, \ldots, A_p$ passent par un même point O, on voit, en menant par le point O une droite D parallèle à la direction Δ, que *la droite* G *est conjuguée harmonique de la droite* D *par rapport aux droites* $A_1, A_2, \ldots, A_p$, c'est-à-dire que si une droite quelconque coupe la droite G au point g, la droite D au point d, et les droites $A_1, A_2, \ldots, A_p$ aux points $a_1, a_2, \ldots$, a_p, *le point g est le centre des moyennes harmoniques du point d par rapport aux points $a_1, a_2, \ldots, a_p$.*

2. Soit A_i l'une quelconque des droites du système. Nous prendrons l'équation de cette droite sous la forme

$$y - m_i x - n_i = 0,$$

et nous poserons $y - m_i x - n_i = A_i$, en sorte que les équations

des diverses droites considérées seront

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \ldots, \quad A_p = 0.$$

Cherchons l'équation de la droite moyenne du système relativement à la direction Δ, définie par le coefficient angulaire μ.

Si nous coupons la droite

$$y - m_i x - n_i = 0$$

par la droite

$$y - \mu x - \nu = 0,$$

nous avons pour coordonnées du point de rencontre a_i,

$$x_i = \frac{\nu - n_i}{m_i - \mu}, \quad y_i = \frac{m_i \nu - \mu n_i}{m_i - \mu}.$$

Les coordonnées du centre g des moyennes distances des points $a_1, a_2, \ldots, a_p$ seront donc données par

$$px = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\nu - n_i}{m_i - \mu} = \nu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{m_i - \mu}$$

et

$$py = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i \nu - \mu n_i}{m_i - \mu} = \nu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} - \mu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{m_i - \mu}.$$

L'équation de la droite moyenne G, obtenue par l'élimination du paramètre ν entre les deux équations précédentes, sera, par suite,

$$py \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} - px \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{m_i - \mu} \left(\sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} - \mu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} \right);$$

mais observons que

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} - \mu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} = p;$$

l'équation deviendra donc, après division par p,

$$y \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} - x \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{m_i - \mu} = 0$$

ou

(1) $$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i}{m_i - \mu} = 0.$$

Donc :

Règle. — *Pour avoir l'équation de la droite moyenne d'un système de droites relativement à une direction* Δ *donnée, il faut :*

1° *Mettre les équations de ces droites sous la forme*

$$y - mx - n = 0;$$

2° *Diviser chacune de ces équations par l'excès du coefficient angulaire correspondant, sur le coefficient angulaire de la direction* Δ;

3° *Faire la somme des équations ainsi préparées.*

3. Remarquons que, si toutes les droites données sont parallèles, l'équation (1) se réduit à

(1') $$\sum_{i=1}^{i=p} A_i = 0.$$

4. L'équation (1) met en évidence ce fait, à savoir que *la droite moyenne de* p *droites relativement à une direction* Δ *coupe chacune de ces droites au même point que la droite moyenne des* $p - 1$ *autres droites relativement à la même direction* Δ.

5. Comme application de cette remarque, déterminons la droite moyenne des trois côtés d'un triangle ABC relativement à une direction Δ donnée.

Menons à la direction Δ une parallèle quelconque qui coupe le côté AB au point C', le côté AC au point B', et le côté BC au point A'. Soient respectivement α, β, γ les milieux des segments B'C', A'C', A'B'; les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont respectivement les droites moyennes des systèmes de droites (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB), relativement à la direction Δ. Donc, d'après la remarque précédente, si a est le point de rencontre de $A\alpha$ et de BC, b celui de $B\beta$ et de AC, c celui de $C\gamma$ et de AB, les points a, b, c

sont en ligne droite, et la droite *abc* est la droite moyenne des trois côtés du triangle ABC, relativement à la direction Δ.

6. Une autre conséquence de l'équation (1), c'est que *la droite moyenne d'un système de droites relativement à la direction de l'une quelconque d'entre elles se confond avec cette droite elle-même;* il est bien facile de se rendre compte de ce fait géométriquement.

7. Si l'on considère un système de droites fixes $A_1, A_2, \ldots, A_p$, à chaque direction Δ correspondra une droite moyenne G. On peut chercher à se rendre compte de la façon dont ces droites moyennes sont distribuées dans le plan, ou, en d'autres termes, à déterminer l'enveloppe de la droite G, lorsqu'on fait varier la direction Δ.

L'équation de cette enveloppe s'obtient par l'élimination de μ entre les équations

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i}{m_i - \mu} = 0 \tag{1}$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i}{(m_i - \mu)^2} = 0. \tag{2}$$

Posons

$$F(\mu) = (m_1 - \mu)(m_2 - \mu)\ldots(m_p - \mu)$$

et

$$F_{hk}(\mu) = \frac{F(\mu)}{(m_h - \mu)(m_k - \mu)}.$$

$F(\mu)$ et $F_{hk}(\mu)$ sont des fonctions entières de μ; la première de degré p, la seconde de degré $p - 2$.

Employant la notation connue $a_1 b_2 - a_2 b_1 = [a_1 b_2]$, nous poserons encore

$$\begin{aligned}\varphi(\mu, a, b) = {} & [a_1 b_2](m_1 - m_2)\big(F_{12}(\mu)\big)^2 + [a_1 b_3](m_1 - m_3)\big(F_{13}(\mu)\big)^2 + \ldots \\ & + [a_1 b_p](m_1 - m_p)\big(F_{1p}(\mu)\big)^2 + [a_2 b_3](m_2 - m_3)\big(F_{23}(\mu)\big)^2 + \ldots \\ & + [a_2 b_p](m_2 - m_p)\big(F_{2p}(\mu)\big)^2 + \ldots \\ & + [a_{p-1} b_p](m_{p-1} - m_p)\big(F_{p-1\,p}(\mu)\big)^2.\end{aligned}$$

On voit, par des calculs un peu longs, mais qui n'offrent au-

cune difficulté, que des équations (1) et (2) résultent pour x et y les valeurs

$$x = \frac{\varphi(\mu, 1, n)}{\varphi(\mu, m, 1)}, \tag{3}$$

$$y = \frac{\varphi(\mu, m, n)}{\varphi(\mu, m, 1)}. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4), qui peuvent être prises pour équations de l'enveloppe cherchée, définissent une courbe unicursale de l'ordre $2(p-2)$.

8. Cette courbe est tangente aux p droites $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Cherchons le point où elle touche l'une quelconque de ces droites, A_1 par exemple.

A cet effet, éliminons $m_1 - \mu$ entre les équations (1) et (2). Il vient

$$\sum_{i=2}^{i=p} \frac{A_i(m_i - m_1)}{(m_i-\mu)^2} = 0. \tag{5}$$

Nous avons ainsi l'équation d'une droite passant par le point de contact de la droite moyenne considérée avec son enveloppe.

Pour $\mu = m_1$, la droite moyenne se confond avec la droite A_1 et l'équation (5) devient

$$\sum_{i=2}^{i=p} \frac{A_i}{(m_i - m_1)} = 0.$$

Cette équation définit la droite moyenne des droites $A_2, A_3, \ldots, A_p$ relativement à la direction de la droite A_1.

Or, cette droite coupe la droite A_1 au centre des moyennes distances des points où A_1 est coupée par les droites $A_2, A_3, \ldots, A_p$. Donc :

L'enveloppe de la droite moyenne d'un système de p droites est, en général, une courbe unicursale de l'ordre $2(p-2)$, tangente à chacune de ces droites au centre des moyennes distances des points où la droite considérée est coupée par les $p-1$ autres droites.

9. Si, en particulier, nous considérons la droite moyenne des

trois côtés d'un triangle, nous voyons, d'après le théorème précédent, que *cette droite a pour enveloppe la conique inscrite dans le triangle, et qui touche ses trois côtés en leurs milieux.*

On voit immédiatement que *cette conique a pour centre le centre de gravité du triangle.*

On trouve d'ailleurs, par des réductions faciles, que si

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

sont les équations des trois côtés, mises sous la forme

$$y - mx - n = 0,$$

l'équation de cette conique peut s'écrire

$$\begin{aligned} &A_1^2(m_2 - m_3)^2 + A_2^2(m_3 - m_1)^2 + A_3^2(m_1 - m_2)^2 \\ &\quad + 2A_1A_2(m_3 - m_1)(m_3 - m_2) + 2A_2A_3(m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \\ &\quad\quad + 2A_3A_1(m_2 - m_3)(m_2 - m_1) = 0. \end{aligned}$$

10. Nous développons, dans un Mémoire qui va paraître prochainement dans les *Nouvelles Annales,* une méthode de transformation géométrique qui permet, entre autres applications, d'établir un très grand nombre de propriétés des droites moyennes. Toutes les propositions qui suivent ont été obtenues par l'emploi de cette méthode.

11. Soient données deux droites A_1 et A_2 et une direction Δ; coupons les droites A_1 et A_2 par une droite quelconque Ω rencontrant la droite A_1 au point a_1 et la droite A_2 au point a_2; menons par les points a_1 et a_2 des parallèles à la direction Δ; la première des droites ainsi menées coupe la droite A_2 au point a'_2, la seconde coupe la droite A_1 au point a'_1; joignons les points a'_1 et a'_2 par une droite Ω'. On voit que les droites Ω et Ω' ont même droite moyenne par rapport à la direction Δ que les droites A_1 et A_2.

Nous exprimons d'une manière abrégée la construction précédente, un peu longue à énoncer, mais bien simple par le fait, en disant que *la droite* Ω' *est obtenue en retournant la droite* Ω, *suivant la direction* Δ, *entre les droites* A_1 *et* A_2.

Cela posé, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$, *p droites données dans un plan; cou-*

pons ce système par une droite Ω *quelconque; retournons la droite* Ω *suivant une direction donnée* Δ *entre les droites* A_1 *et* A_2, *ce qui nous donne une droite* Ω_1; *retournons ensuite* Ω, *suivant* Δ, *entre* Ω_1 *et* A_3, *ce qui nous donne* Ω_2; *puis* Ω, *toujours suivant* Δ, *entre* Ω_2 *et* A_4, *ce qui nous donne* Ω_3, *et ainsi de suite; nous finirons par obtenir une droite* Ω_{p-1};

1° *Les droites* Ω_{p-1} *et* Ω *se coupent sur la droite moyenne* G *du système des droites* $A_1, A_2, \ldots, A_p$, *relativement à la direction* Δ;

2° *Si les droites* G, Ω *et* Ω_{p-1} *coupent respectivement aux points* g, ω *et* ω_{p-1} *une parallèle quelconque à la direction* Δ, *on a*

$$\frac{\omega g}{\omega\omega_{p-1}} = \frac{1}{p}.$$

De là résulte une construction de la droite moyenne d'un système de droites relativement à une direction donnée.

12. Soit G la droite moyenne des droites $A_1, A_2, \ldots, A_p$, relativement à la direction Δ. Si nous retournons la droite G, suivant la direction Δ, entre les droites A_1 et A_2, nous obtenons la droite B_2; de même, la droite G retournée, suivant la direction Δ, entre B_2 et A_3, donne la droite B_3; G retournée, toujours suivant Δ, entre B_3 et A_4, donne B_4; et ainsi de suite, jusqu'à une droite B_k quelconque. *Les droites* $B_k, A_{k+1}, \ldots, A_p$ *ont pour droite moyenne, relativement à la direction* Δ, *la même droite* G *que les droites* $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

13. La droite moyenne joue un rôle intéressant dans certaines questions relatives aux coniques. En voici quelques exemples :

I. *Si un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique* C *et circonscrit à une autre conique, la droite moyenne des trois côtés de ce triangle, relativement à l'une ou à l'autre des directions asymptotiques de la conique* C, *passe par un point fixe.*

II. *L'enveloppe de la droite moyenne, relativement à une direction fixe* Δ, *des côtés d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques données, est une conique homologique de celle*

à laquelle le polygone reste circonscrit, le centre d'homologie étant à l'infini dans la direction Δ ([1]).

III. Soient maintenant H et H' deux hyperboles telles que les tangentes à ces hyperboles, parallèles à la droite qui joint leurs centres O et O', soient les mêmes. Appelons H_1 et H'_1 les *hyperboles complémentaires* ([2]) de H et H'. Nous aurons ce théorème :

Si un polygone P, *d'un nombre quelconque de côtés, se meut en restant inscrit dans l'hyperbole* H_1 *et circonscrit à l'hyperbole* H'_1, *la droite moyenne, relativement à la direction* OO', *des tangentes à l'hyperbole* H_1, *menées par les sommets du polygone* P, *passe par un point fixe* A *qui est le point de rencontre des diamètres de* H_1 *et de* H'_1, *conjugués de la direction* OO'.

De là ce corollaire :

Si l'on mène par le point A *une parallèle* D *à* OO', *le point* A *est constamment le centre des moyennes distances des points où la droite* D *est coupée par les tangentes à l'hyperbole* H_1, *menées par les sommets du polygone* P.

14. Mais la notion de la droite moyenne intervient aussi, comme on va voir, dans des propriétés beaucoup plus générales des courbes. Exemples :

I. *Étant données une droite* D *et une courbe* C *de la classe* p, *si par chaque point de la droite* D *on tire les* p *tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe* C, *et que l'on prenne la droite moyenne de ces* p *tangentes relativement à la direction de la droite* D, *cette droite moyenne passe par un point fixe.*

([1]) Je généralise ainsi ce théorème :

La polaire d'un point fixe A, *par rapport aux côtés d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques données, enveloppe une conique homologique de celle à laquelle le polygone est circonscrit, le centre d'homologie étant confondu avec le point* A.

([2]) Étant menées à une hyperbole deux tangentes parallèles, on forme le parallélogramme qui a pour diagonales les asymptotes, et ces deux tangentes pour côtés; les deux autres côtés de ce parallélogramme enveloppent une seconde hyperbole, qui a mêmes asymptotes que la première, et que nous appellerons sa *complémentaire*.



II. *Une droite qui se déplace, en restant parallèle à une direction fixe* Δ, *coupe à chaque instant une courbe d'ordre* p *en* p *points; la droite moyenne, relativement à la direction* Δ, *des tangentes en ces* p *points est fixe et se confond avec la droite moyenne des droites qui joignent deux à deux tous les points de contact de la courbe donnée et de ses tangentes parallèles à la direction* Δ.

III. Considérons deux courbes C_1 et C_2 et une direction Δ quelconque. Menons à chacune de ces courbes toutes les tangentes que l'on peut leur mener parallèlement à la direction Δ. Appelons (C_1) l'ensemble des points de contact ainsi déterminés sur C_1, (C_2) l'ensemble de ceux qui sont déterminés sur (C_2).

Soient de plus (T) le système des tangentes communes aux courbes C_1 et C_2, (T_1) le système des tangentes que l'on peut mener de tous les points du système (C_2) à la courbe C_1, (T_2) le système des tangentes que l'on peut mener de tous les points du système (C_1) à la courbe C_2, (D) l'ensemble de toutes les droites qui joignent deux à deux les points du système (C_1) aux points du système (C_2). Nous aurons ce théorème :

Les systèmes de droites (T), (T_1), (T_2) *et* (D) *ont même droite moyenne relativement à la direction* Δ.

IV. Supposons données une courbe C et une direction Δ. Prenons sur la courbe C un point c, et soit T la tangente en ce point; par le point c menons à la direction Δ une parallèle et supposons que cette parallèle coupe au point γ une droite quelconque prise pour base d'une involution; au point γ correspondra dans cette involution un point γ'; par le point γ menons à Δ une parallèle qui coupe la tangente T au point c'; lorsque le point c décrira la courbe C, le point c' engendrera une courbe C'. Cela posé, nous aurons ce théorème :

Si une parallèle à la direction Δ *coupe la courbe* C *aux points* $c_1, c_2, \ldots, c_p$, *que* $T_1, T_2, \ldots, T_p$ (*formant le système* (T)) *soient les tangentes à cette courbe en ces points, que* $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ *soient les points de* C' *correspondant à* $c_1, c_2, \ldots, c_p$, *que* $T'_1, T'_2, \ldots, T'_p$ (*formant le système* (T')) *soient les*

tangentes à C′ *aux points* c'_1, c'_2, ..., c'_p, *les systèmes* (T) *et* (T′) *ont même droite moyenne relativement à la direction* Δ.

15. La droite moyenne d'un système de droites par rapport à une direction donnée se confond avec la polaire, relativement à ce système de droites, du point situé à l'infini dans la direction donnée. Cette remarque conduit à une généralisation facile des propositions du numéro précédent; on obtient ainsi les théorèmes suivants :

I. *Étant donné un point* A, *une droite* D *passant par ce point et une courbe* C *de la classe* p, *si par chaque point de la droite* D *on tire les* p *tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe* C, *la polaire du point* A *par rapport à ces* p *tangentes passe par un point fixe.*

II. *Une droite qui se déplace, en passant constamment par un point fixe* A, *coupe à chaque instant une courbe d'ordre* p *en* p *points; la polaire du point* A *par rapport aux tangentes en ces* p *points est fixe et se confond avec la polaire du point* A *par rapport aux droites qui joignent deux à deux tous les points de contact de la courbe donnée et des tangentes à cette courbe issues du point* A.

III. *La polaire d'un point* A *par rapport aux tangentes communes à deux courbes* C_1 *et* C_2 *se confond :* 1° *avec la polaire du point* A *par rapport aux droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de* A *à* C_1 *aux points de contact des tangentes menées de* A *à* C_2 ; 2° *avec la polaire du point* A *par rapport aux tangentes à* C_1 *issues des points de contact des tangentes menées de* A *à* C_2 ; 3° *avec la polaire du point* A *par rapport aux tangentes à* C_2 *issues des points de contact des tangentes menées de* A *à* C_1.

La première partie de ce théorème III a déjà été donnée par M. Laguerre (*Bulletin de la Soc. math.*, t. III, p. 176).

Sur la réduction des intégrales abéliennes;
Par M. H. Poincaré.

1. Tous les lecteurs de ce Bulletin connaissent les remarquables travaux de M. Picard *Sur la réduction des intégrales abéliennes*, qui, après avoir paru dans divers numéros des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, ont été réunis ici même en un Mémoire unique. La même question a été l'objet des recherches des géomètres étrangers, et en particulier des géomètres allemands.

En 1874, Mme Kowalevski a envoyé à l'Université de Göttingen un Mémoire qui va paraître dans les *Acta Mathematica*. Dans ce Mémoire (*Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'schen Integrale 3ten Ranges auf elliptische Integrale*), elle cite les deux théorèmes suivants, dus à M. Weierstrass :

Si l'on envisage un système de ρ intégrales abéliennes de rang ρ, parmi lesquelles il y en a une qui est susceptible d'être réduite aux intégrales elliptiques, et si l'on considère également la fonction Θ correspondante :

1° *Cette fonction Θ à ρ variables peut être changée, par une* transformation *d'ordre k, dans le produit d'une fonction Θ à une variable et d'une fonction Θ à $\rho-1$ variables.*

2° *Elle peut également par une transformation* linéaire, *c'est-à-dire du premier ordre, être amenée à une forme telle que, le tableau des périodes s'écrivant comme il suit :*

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1\rho}, \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2\rho}, \\ . & . & \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tau_{\rho 1} & \tau_{\rho 2} & \dots & \tau_{\rho\rho} \end{matrix}\right.$$

avec les conditions habituelles

$$\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha},$$

la période τ_{12} soit commensurable et que les périodes

$$\tau_{13},\ \tau_{14},\ \dots,\ \tau_{1\rho}$$

soient nulles.

Le premier de ces théorèmes a été communiqué à M. Königsberger et le second à Mme Kowalevski par des lettres de M. Weierstrass. Mais ils ne paraissent pas avoir été publiés.

Le premier de ces théorèmes peut se généraliser comme il suit :

Si l'on envisage un système de ρ intégrales abéliennes de première espèce et de rang ρ, parmi lesquelles il y en a μ qui sont susceptibles d'être réduites au rang μ, la fonction Θ correspondante à ρ variables peut être changée par une transformation d'ordre k, dans le produit d'une fonction Θ à μ variables et d'une fonction Θ à $\rho - \mu$ variables.

Le second théorème est également susceptible d'une généralisation, ainsi qu'on le verra plus loin.

Il n'est pas douteux que ces généralisations ne soient connues de M. Weierstrass; mais, comme il serait difficile en France de s'en procurer la démonstration, je crois qu'il ne sera pas inutile de la développer ici, ignorant d'ailleurs si la marche que je vais suivre est la même qu'a employée l'illustre analyste allemand.

2. Soit

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$$

un système quelconque de 2ρ périodes. Posons

$$(1) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{k=2\rho} a_{ik} x'_k,$$

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2\rho}$ désignant un nouveau système de 2ρ périodes, et les coefficients a_{ik} étant entiers. Il est clair que toute fonction qui admettra les nouvelles périodes x' admettra également les anciennes périodes x.

Si, de plus, le déterminant des a_{ik} est égal à $+1$, les nouvelles périodes x' pourront réciproquement s'exprimer linéairement à l'aide des anciennes par des expressions à coefficients entiers. Les deux systèmes de périodes seront alors *équivalents*.

Soit une fonction de ρ variables admettant 2ρ périodes linéairement indépendantes. Ces 2ρ périodes formeront un système *primitif*, si toute autre période s'exprime à l'aide des 2ρ périodes considérées, par une expression linéaire à coefficients entiers. Tous les systèmes primitifs sont équivalents.

Un système de μ périodes ($\mu < 2\rho$) sera un système incomplet; il sera *primitif* si on peut le compléter en lui adjoignant $2\rho - \mu$ nouvelles périodes convenablement choisies, de telle façon que le système ainsi complété soit lui-même primitif.

Soit

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$$

un système *complet primitif*. Formons un système incomplet

$$(2) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,2\rho}x_{2\rho} = x'_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,2\rho}x_{2\rho} = x'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{\mu,1}x_1 + a_{\mu,2}x_2 + \ldots + a_{\mu,2\rho}x_{2\rho} = x'_\mu, \end{cases}$$

où les coefficients sont entiers. Pour que ce système soit primitif, il faut et il suffit que les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2\rho} \\ a_{2,1} & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{\mu,1} & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

aient pour plus grand commun diviseur l'unité.

Envisageons l'ensemble des périodes qui peuvent s'écrire

$$\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_\mu x'_\mu,$$

les α étant *commensurables* et les x' étant toujours les périodes du système incomplet (2). *Toutes* ces périodes pourront s'exprimer linéairement à l'aide de μ d'entre elles $x''_1, x''_2, \ldots, x''_\mu$ par une expression à coefficients entiers. Si le système des x' est primitif, il est équivalent au système des x''. Si le système des x' n'est pas primitif, le système des x'', *qui est toujours primitif,* pourra s'appeler la base du système (2).

Dire que, dans un système de ρ intégrales abéliennes de première espèce et de rang ρ, il y en a μ linéairement indépendantes, qui sont susceptibles d'être réduites au rang μ, c'est dire que l'on peut trouver un système de $2\rho - 2\mu$ périodes qui sont nulles à la fois dans ces μ intégrales.

On peut toujours supposer que ce système incomplet est primitif; car, s'il existe un système incomplet non primitif de $2\rho - 2\mu$ périodes qui soient nulles à la fois dans μ intégrales, la *base* de

ce système non primitif jouira de la même propriété. D'où la conséquence suivante :

On peut toujours trouver, pour nos ρ intégrales abéliennes, un système primitif de 2ρ périodes, de telle façon que les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes soient nulles dans μ des ρ intégrales considérées.

3. Mais ce système primitif ne sera pas en général un système de *périodes normales*.

A chaque système primitif de périodes de ρ intégrales abéliennes est attachée une forme bilinéaire à deux séries de 2ρ variables

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}; y_1, y_2, \ldots, y_{2\rho}).$$

Si dans cette forme on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$ par les périodes (formant le système primitif considéré) d'une de nos ρ intégrales abéliennes et $y_1, y_2, \ldots, y_{2\rho}$ par les périodes correspondantes d'une seconde intégrale, la forme s'annule.

Si l'on y remplace les x par les parties réelles des périodes d'une des intégrales et les y par les parties imaginaires de ces mêmes périodes, le résultat de cette substitution sera positif.

La forme F est une forme bilinéaire *identique*, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}; x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}) = 0.$$

On sait que les formes bilinéaires identiques ont un seul invariant qui est le déterminant où le $m^{\text{ième}}$ terme de la $n^{\text{ième}}$ colonne est le coefficient de $x_m y_n$. Cet invariant, qui est toujours un carré parfait, est égal à 1 dans le cas qui nous occupe.

Une force bilinéaire d'invariant 1 est *réduite* lorsqu'elle s'écrit

$$(3) \qquad x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \ldots + x_{2\rho-1} y_{2\rho} - x_{2\rho} y_{2\rho-1}.$$

Le système primitif considéré est alors un système de *périodes normales*.

Qu'arrive-t-il maintenant lorsque l'on passe d'un système primitif à un autre système primitif équivalent? Posons, comme plus haut,

$$(1) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{k=2\rho} a_{ik} x'_k,$$

les a_{ik} étant des entiers dont le déterminant sera égal à 1. Les x' formeront comme les x un système primitif, et si l'on désigne par y'_k la période de la seconde intégrale qui correspond à x'_k, on aura

$$(1\ bis) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{k=2p} a_{ik} y'_k.$$

En remplaçant dans F les x et les y par leurs valeurs (1) et (1 *bis*), on obtiendra une forme bilinéaire en x' et en y', arithmétiquement équivalente à F et d'invariant 1. Ce sera la forme bilinéaire correspondant au système primitif des x'.

On pourra toujours choisir la substitution linéaire (1), de telle façon que la forme F ainsi transformée soit réduite, et par conséquent que le système primitif des x' soit un système de périodes normales (*Cf.* Clebsch et Gordan, *Abelsche Functionen*, p. 106). Il existe également des substitutions linéaires qui changent la forme (3) en elle-même et qui, par conséquent, changent un système de périodes normales en un autre système de périodes normales (*loc. cit.*, p. 300). C'est ce qu'on appelle les *transformations linéaires ou du premier ordre*.

Imaginons maintenant que dans les relations (1) et (1 *bis*) les a_{ik} soient encore entiers, mais que leur déterminant soit égal à $\Delta(\Delta > 1)$. Alors le système des x' ne sera plus un système de périodes de nos intégrales abéliennes, mais ce sera un système de périodes, primitif ou non, d'*autres* intégrales abéliennes.

Si l'on remplace dans F les x et les y par leurs valeurs (1) et (1 *bis*), on obtiendra une forme bilinéaire identique en x' et y', d'invariant Δ^2.

Je dirai qu'une pareille forme est réduite lorsqu'elle s'écrira

$$(4) \quad k_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) + k_2(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots + k_p(x_{2p-1} y_{2p} - x_{2p} y_{2p-1}),$$

et il est aisé de voir que l'on peut toujours *réduire* une forme bilinéaire identique par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant 1.

Supposons en particulier que la forme F soit réduite, de telle façon que les x soient les périodes normales des intégrales abéliennes données. Supposons, de plus, qu'après la transformation notre forme soit encore réduite, c'est-à-dire qu'elle se réduise à

une expression telle que (4), et de telle sorte que

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_\rho = k.$$

Alors les x' seront les périodes normales d'un nouveau système d'intégrales abéliennes; par conséquent la substitution (1) aura changé un système de périodes normales en un autre système de périodes normales, mais appartenant à de *nouvelles* intégrales. Elle s'appellera alors une *transformation d'ordre k*.

4. Ces préliminaires posés, passons à la démonstration du premier théorème de M. Weierstrass, généralisé.

Nous avons supposé que, les x formant un système primitif de périodes et F étant la forme correspondante, les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes étaient nulles pour μ de nos ρ intégrales. Posons encore

$$(1) \qquad x_i = \Sigma a_{ik} x'_k, \quad y_i = \Sigma a_{ik} y'_k,$$

les a_{ik} étant entiers, mais leur déterminant étant en général plus grand que 1.

Si les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système ne dépendent que des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes de l'ancien système, si, en d'autres termes, on a

$$(5) \qquad a_{ik} = 0$$
$$(i = 2\mu + 1,\ 2\mu + 2,\ \ldots,\ 2\rho - 1,\ 2\rho;\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2\mu - 1,\ 2\mu),$$

les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système seront nulles comme celles de l'ancien pour les μ intégrales dont il vient d'être question.

Si l'on peut trouver une substitution linéaire de la forme (1) satisfaisant aux conditions (5) et réduisant le système de périodes à un système de périodes normales des intégrales transformées; si, en d'autres termes, on peut trouver une pareille substitution qui réduise la forme F à une expression, telle que (4), avec les conditions

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_\rho = k,$$

le théorème énoncé sera démontré.

Remarquons même qu'il le sera encore, si nous arrivons au même résultat en appliquant *successivement* à notre forme F plusieurs substitutions assujetties aux conditions que nous venons d'énon-



cer; car la résultante de deux pareilles substitutions satisfait également à ces mêmes conditions.

Quand dans la forme F on annule les $2\rho - 2\mu$ derniers x et les $2\rho - 2\mu$ derniers y, il reste une forme bilinéaire F_1 admettant deux séries de 2μ variables, $x_1, x_2, \ldots, x_{2\mu}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{2\mu}$. Je puis toujours supposer qu'elle est réduite et s'écrit

$$F_1 = k_1(x_1y_2 - x_2y_1) + k_2(x_3y_4 - x_4y_3) + \ldots$$
$$+ k_\mu(x_{2\mu-1}y_{2\mu} - x_{2\mu}y_{2\mu-1});$$

car, si cela n'était pas, on ferait subir aux variables une substitution linéaire de déterminant 1, *ne portant que sur les* 2μ *premières périodes*, et qui réduirait la forme F_1.

Nous pourrons alors écrire

$$F = F_1 + F_2 + F_3,$$

F_1 ne contenant que les 2μ premières périodes, F_2 ne contenant que les $2\rho - 2\mu$ dernières et F_3 représentant l'ensemble des termes qui dépendent à la fois d'une des 2μ premières et d'une des $2\rho - 2\mu$ dernières.

Nous allons chercher par une suite de substitutions linéaires à faire disparaître successivement tous les termes de F_3.

Soit, par exemple, à faire disparaître un terme

$$a(x_1y_i - x_iy_1),$$

x_i étant une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes; nous poserons

$$x_2 = x'_2 - ax'_i, \quad x_i = k_1x'_i;$$

de même, si l'on veut faire disparaître un terme

$$b(x_2y_i - x_iy_2),$$

on posera

$$x_1 = x'_1 + bx'_i, \quad x_i = k_1x'_i,$$

et ainsi de suite.

Toutes ces substitutions satisfont aux conditions (5) et l'on obtiendra finalement une forme F' transformée de F qui s'écrira

$$F' = F'_1 + F'_2, \tag{6}$$

F'_1 ne dépendant que des 2μ premières et F'_2 des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système : *les deux catégories de périodes sont séparées*. La forme F'_1, ne différant d'ailleurs de F_1 qu'en

ce que les anciennes variables sont remplacées par les nouvelles, sera réduite. On réduira ensuite la forme F'_2 par une substitution linéaire de déterminant 1 *ne portant que sur les* $2\rho - 2\mu$ *dernières périodes;* la forme F' transformée se réduira alors à une expression telle que (4), d'où il est aisé de passer à l'expression

$$k(x_1 y_2 - x_2 y_1) + k(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots + k(x_{2\rho-1} y_{2\rho} - x_{2\rho} y_{2\rho-1})$$

C. Q. F. D.

5. Mais on peut craindre, en suivant la marche qui précède, d'être conduit à employer une transformation d'ordre trop élevé. C'est ce qui nous amène à nous poser le problème suivant :

Trouver toutes les substitutions satisfaisant aux conditions (5) *et qui ramènent la transformée* F' *de* F *à la forme* (6), *où les deux catégories de périodes sont séparées.*

Ce problème se ramène au suivant :

Trouver toutes les substitutions linéaires portant sur les $2\rho - 2\mu$ *dernières périodes et telles qu'après la transformation tous les coefficients des termes qui contiennent à la fois* x_1 *ou* x_2 *et une des* $2\rho - 2\mu$ *dernières périodes soient divisibles par* k_1; *que tous les coefficients des termes qui contiennent à la fois* x_3 *ou* x_4 *et une des* $2\rho - 2\mu$ *dernières périodes soient divisibles par* k_3; etc.

Soit

$$F_3 = \Sigma b_{ik}(x_i y_k - x_k y_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2\mu; \quad k = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho).$$

Posons maintenant

$$x_k = \Sigma_h c_{kh} x'_h$$
$$(k = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho; \quad h = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho),$$

d'où

$$F_3 = \Sigma b_{ik} c_{kh}(x_i y'_h - x'_h y_i).$$

Les conditions énoncées se réduisent à

$$(7) \qquad \Sigma_k b_{ik} c_{kh} \equiv 0 \pmod{k_l}$$

(en supposant $i = 2l$ ou $2l - 1$).

Le nombre total des congruences (7) est $2\mu(2\rho - 2\mu)$. Il est

aisé de voir de quelle forme en est la solution générale; on trouve

$$c_{kh} = \Sigma_m d_{km} \alpha_{mh}.$$

Dans cette expression, les d ont des valeurs déterminées; les α peuvent prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives; enfin l'indice m varie, comme les indices k et h eux-mêmes, depuis $2\mu+1$ jusqu'à 2ρ. Il résulte de là que la substitution

$$x_k = \Sigma c_{kh} x'_h$$

peut être regardée comme la résultante des deux substitutions suivantes :

$$(8) \qquad x_k = \Sigma d_{km} x''_m,$$

$$(9) \qquad x''_m = \Sigma \alpha_{mh} x'_h.$$

La substitution (8) est la plus simple de toutes les substitutions linéaires qui satisfont aux congruences (7), pendant que (9) est une substitution linéaire *quelconque* à coefficients entiers.

Ainsi l'on obtiendra toutes les substitutions qui satisfont auxdites congruences en faisant suivre la plus simple d'entre elles d'une substitution *quelconque* à coefficients entiers. Nous pourrons donc nous borner à envisager la substitution (8) elle-même.

Appliquons donc à notre forme F la substitution (8); tous les coefficients de F_3 satisferont aux congruences (7). Par exemple, le coefficient du terme $x_1 y_i - y_1 x_i$, x_i étant une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes, sera divisible par k_1, et ce terme s'écrira

$$a k_1 (x_1 y_i - y_1 x_i),$$

de sorte qu'on pourra le faire disparaître en posant simplement

$$x_2 = x'_2 - a x_i,$$

c'est-à-dire par une substitution de *déterminant* 1.

Ce sera là la manière la plus simple de faire disparaître tous les termes de F_3. Si, après avoir séparé, comme nous venons de le dire, les deux catégories de périodes, on applique à la forme F une substitution linéaire quelconque ne portant que sur les 2μ premières périodes, puis une substitution linéaire quelconque ne portant que sur les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes, il est clair que, dans la forme ainsi transformée, les deux catégories de périodes seront en-

core séparées. On est ainsi conduit à une infinité de manières de faire disparaître tous les termes de F_3, et il est aisé de voir qu'*il n'y en a pas d'autres.*

6. Occupons-nous maintenant de démontrer le second théorème de M. Weierstrass. Nous supposons qu'une intégrale est réductible aux intégrales elliptiques, et par conséquent $\mu = 1$. Dans le système primitif d'où nous partons, les $2\rho - 2$ dernières périodes sont nulles. Il s'agit de ramener ce système à un système *normal*, mais cette fois par une transformation de *déterminant* 1. Nous devons de plus supposer que dans le nouveau système les $2\rho - 3$ dernières périodes ne dépendent que des $2\rho - 2$ dernières périodes de l'ancien système (de façon qu'elles soient nulles dans l'intégrale réductible), et que la deuxième et la troisième nouvelles périodes ne dépendent que des $2\rho - 1$ dernières périodes de l'ancien système (de façon qu'elles soient commensurables entre elles dans l'intégrale réductible).

Quand la possibilité d'une pareille réduction sera établie, le théorème de M. Weierstrass sera démontré.

Nous avons encore notre forme

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

qu'il s'agit de réduire. Ici

$$F_1 = a_2(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$
$$F_3 = \Sigma a_i(x_1 y_i - x_i y_1) + \Sigma b_i(x_2 y_i - x_i y_2).$$

Nous poserons d'abord

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1, \\ a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_{2\rho} x_{2\rho} &= x'_2, \\ \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_{2\rho} x_{2\rho} &= x'_3, \\ \beta_{i,3} x_3 + \ldots + \beta_{i,2\rho} x_{2\rho} &= x'_i, \quad (i > 3). \end{aligned}$$

C'est là une substitution linéaire satisfaisant aux conditions énoncées, *pourvu que son déterminant soit égal à* 1. Or, les coefficients $a_2, a_3, \ldots, a_{2\rho}$ devant être premiers entre eux, puisque l'invariant de F est égal à 1, on pourra toujours choisir les α et les β de telle façon que ce déterminant soit égal à 1.

Après cette substitution la forme F se changera en

$$F' = F'_1 + F'_2 + F'_3,$$

où

$$F'_1 = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1, \quad F'_3 = \Sigma c_i (x'_2 y'_i - x'_i y'_2).$$

Il suffira pour faire disparaître F'_3 de poser

$$x'_1 = x''_1 + \Sigma c_i x'_i.$$

Après cette nouvelle transformation, la forme F deviendra

$$F'' = x''_1 y''_2 - x''_2 y''_1 + F''_2.$$

Il reste à réduire F''_2, mais de telle façon que les $2\rho - 3$ dernières périodes du nouveau système ne dépendent que des $2\rho - 3$ dernières périodes de l'ancien. Cela peut se faire absolument de la même manière.

Nous pouvons écrire, en effet, en supprimant les accents,

$$F''_2 = \Sigma d_i (x_3 y_i - x_i y_3) + \Sigma e_i (x_4 y_i - x_i y_4) + F'_4,$$

où i est plus grand que 3 et où F'_4 ne dépend que des $2\rho - 4$ dernières périodes. Nous poserons alors

$$\begin{aligned} x_3 &= x'_3, \\ x'_4 &= d_4 x_4 + d_5 x_5 + \ldots + d_{2\rho} x_{2\rho}, \\ x'_i &= \delta_{i,4} x_4 + \delta_{i,5} x_5 + \ldots + \delta_{i,2\rho} x_{2\rho}, \end{aligned}$$

en choisissant les δ de façon que le déterminant de cette substitution linéaire soit égal à 1.

Il viendra après transformation

$$F'''_2 = x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3 + \Sigma f_i (x'_4 y'_i - x'_i y'_4) + F''_4;$$

F''_4 ne dépend que des $2\rho - 4$ dernières périodes. Nous poserons

$$x'_3 = x''_3 + \Sigma f_i x'_i;$$

d'où, après la transformation,

$$F'''_2 = x''_3 y'_4 - x''_4 y''_3 + F'''_4.$$

Il reste enfin à réduire F'''_4, mais cette fois par une substitution *quelconque* de déterminant 1, ce qui se fera aisément.

Le second théorème de M. Weierstrass est donc démontré.

7. Occupons-nous maintenant de généraliser ce résultat en supposant que, au lieu d'une intégrale réductible aux fonctions elliptiques, nous ayons μ intégrales réductibles au genre μ. Supposons,



pour fixer les idées, $\mu = 2$, de telle façon que les $2\rho - 4$ dernières périodes de notre système primitif soient nulles pour nos μ intégrales. Notre forme F s'écrira encore

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

et nous pourrons supposer que F_1 est réduit de telle sorte que

$$\begin{aligned} F_1 &= a_2(x_1y_2 - x_2y_1) + b_4(x_3y_4 - x_4y_3), \\ F_3 &= \Sigma a_i(x_1y_i - x_iy_i) + \Sigma b_i(x_3y_i - x_iy_3) \\ &\quad + \Sigma c_i(x_2y_i - x_iy_2) + \Sigma d_i(x_4y_i - x_iy_4), \quad (i > 4). \end{aligned}$$

Posons

$$x_1 = x'_1, \quad x_3 = x'_3,$$

(10) $$\begin{cases} a_2x_2 + a_5x_5 + a_6x_6 + \ldots + a_{2\rho}x_{2\rho} = x'_2, \\ b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + \ldots + b_{2\rho}x_{2\rho} = x'_4, \end{cases}$$

$$x'_i = \Sigma \alpha_{ik}x_k,$$
$$(k = 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots,\ 2\rho), \quad (i = 5,\ 6,\ \ldots,\ 2\rho).$$

L'invariant de la forme F étant égal à $+1$, les déterminants contenus dans la matrice

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 & a_5 & a_6 & \ldots & a_{2\rho} \\ 0 & b_4 & b_5 & b_6 & \ldots & b_{2\rho} \end{vmatrix}$$

sont premiers entre eux. Il en résulte que l'on peut choisir les α, de telle sorte que le déterminant de la substitution linéaire (10) soit égal à 1.

Après cette transformation, la forme F deviendra

$$F' = F'_1 + F'_2 + F'_3,$$

où

$$\begin{aligned} F'_1 &= x'_1y'_2 - x'_2y'_1 + x'_3y'_4 - x'_4y'_3, \\ F'_3 &= \Sigma c'_i(x'_2y'_i - x'_iy'_2) + \Sigma d'_i(x'_4y'_i - x'_iy'_4). \end{aligned}$$

On posera alors

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x''_1 + \Sigma c'_i x''_i, \quad x'_3 = x''_3 + \Sigma d'_i x''_i, \\ x'_2 &= x''_2, \quad x'_4 = x''_4, \quad x'_i = x''_i, \end{aligned}\right\} (i > 4),$$

et la forme F se réduira à

$$F'' = (x''_1y''_2 - x''_2y''_1 + x''_3y''_4 - x''_4y''_3 + F''_2,$$

F''_2 ne dépendant que des $2\rho - 4$ dernières périodes. Il reste à réduire F''_2. Cette réduction une fois opérée, le système des périodes sera ramené à un système normal, et, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, l'une quelconque des $2\rho - 4$ dernières périodes s'exprimera linéairement à l'aide de la deuxième et de la quatrième par une expression à coefficients commensurables.

Or nous pouvons toujours supposer que la deuxième période est égale à 1 dans la première de nos deux intégrales réductibles et à zéro dans la deuxième, et que la quatrième période est égale à zéro dans la première de ces deux intégrales et à 1 dans la deuxième. Voici quel sera alors le Tableau des périodes de ces deux intégrales

$$\begin{array}{cccccccc} A & 1 & B & 0 & a_5 & a_6 & \ldots & a_{2\rho} \\ A' & 0 & B' & 1 & b_5 & b_6 & \ldots & b_{2\rho} \end{array}$$

les a et les b étant commensurables.

Il s'agit maintenant de simplifier ce Tableau en transformant les périodes, *mais de façon qu'elles ne cessent pas d'être des périodes normales.*

Or, 1° les périodes ne cesseront pas d'être normales si l'on applique à une période de rang impair et à la période de rang pair qui la suit une substitution linéaire à deux variables et de déterminant 1.

Ainsi l'on peut poser, par exemple,

$$(11) \qquad a'_5 = \alpha a_5 + \beta a_6, \quad a'_6 = \gamma a_5 + \delta a_6, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

et remplacer dans le Tableau a_5 et a_6 par a'_5 et a'_6; le système de périodes ainsi défini sera encore *normal.*

On choisira les coefficients de cette substitution de telle façon que a'_6 soit nul; on opérera de la même manière sur chacune des $\rho - 2$ dernières paires de périodes, de façon à faire disparaître dans chacune d'elles les périodes de rang pair de la première intégrale; par conséquent on peut toujours supposer

$$a_6 = a_8 = a_{10} = \ldots = a_{2\rho} = 0.$$

2° Posons

$$(12) \qquad \begin{cases} a'_{2\mu-1} = \alpha a_{2\mu-1} + \beta a_{2\nu-1}, & a'_{2\nu-1} = \gamma a_{2\mu-1} + \delta a_{2\nu-1}, \\ a'_{2\mu} = \delta a_{2\mu} - \gamma a_{2\nu}, & a'_{2\nu} = -\beta a_{2\mu} + \alpha a_{2\nu}, \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{cases}$$

Si, dans le système des périodes, on remplace

$$a_{2\mu-1},\ a_{2\mu},\ a_{2\nu-1},\ a_{2\nu}$$

par

$$a'_{2\mu-1},\ a'_{2\mu},\ a'_{2\nu-1},\ a'_{2\nu},$$

ce système restera *normal*.

Appliquons la substitution (12) en faisant

$$\mu = \rho,\quad \nu = \rho - 1.$$

En choisissant les coefficients de la substitution, nous pourrons faire disparaître $a_{2\rho-1}$, sans que $a_{2\rho}$ et $a_{2\rho-2}$ cessent d'être nuls.

On appliquera ensuite la même substitution, en faisant

$$\mu = \rho - 1,\quad \nu = \rho - 2,$$

et l'on fera disparaître $a_{2\rho-3}$.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les a, excepté a_5, soient nuls; on aura

$$a_6 = a_7 = a_8 = \ldots = a_{2\rho} = 0.$$

Opérons maintenant sur les b. Appliquons la substitution (11) aux $\rho - 3$ dernières paires de périodes, de façon à faire disparaître dans chacune d'elles les périodes de rang pair, ce qui s'écrit

$$b_8 = b_{10} = \ldots = b_{2\rho} = 0.$$

Nous ne pouvons opérer de même sur la paire $b_5 b_6$, sans quoi a_6 cesserait d'être nul.

Appliquons maintenant la substitution (12) aux deux dernières paires, de façon à faire disparaître $b_{2\rho-1}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$, de façon à faire disparaître $b_{2\rho-3}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait

$$b_8 = b_9 = b_{10} = \ldots = b_{2\rho} = 0.$$

On ne peut opérer sur les troisième et quatrième paires, de façon à faire disparaître b_7, sans quoi a_7 cesserait d'être nul.

Toutes ces réductions faites, le Tableau des périodes s'écrit

A	1	B	0	a_5	0	0	0	0	...	0
A'	0	B'	1	b_5	b_6	b_7	0	0	...	0

Il reste à faire disparaître b_6. Pour cela nous appliquerons la

substitution (12) à la deuxième et à la troisième paire, de façon à faire disparaître la sixième période de la deuxième intégrale; le Tableau des périodes s'écrit alors, après cette dernière transformation,

$$\begin{matrix} A & 1 & B_1 & 0 & (\lambda + \mu B_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ A' & 0 & B'_1 & 1 & (\lambda' + \mu B'_1) & 0 & \nu & \ldots & 0 \end{matrix}$$

où λ, μ et ν sont commensurables et où il est aisé de voir que $A' = B_1$.

Le résultat ainsi obtenu se généralise aisément pour le cas de $\mu > 2$, la démonstration étant absolument la même. Pour énoncer ce théorème, je supposerai, pour fixer les idées, $\mu = 3$, $\rho = 7$, et j'imaginerai que le Tableau des périodes ait été écrit sous sa forme habituelle (A).

On aura

$$\tau_{17} = \tau_{27} = \tau_{37} = \tau_{16} = \tau_{26} = 0,$$
$$\tau_{36} = \nu_3, \quad \tau_{14} = \lambda_1 + \lambda_2\tau_{12} + \lambda_3\tau_{13},$$
$$\tau_{24} = \mu_1 + \lambda_2\tau_{22} + \lambda_3\tau_{23}, \quad \tau_{34} = \nu_1 + \lambda_2\tau_{23} + \lambda_3\tau_{33},$$
$$\tau_{15} = \lambda_4\tau_{13}, \quad \tau_{25} = \mu_2 + \lambda_4\tau_{23}, \quad \tau_{35} = \nu_2 + \lambda_4\tau_{33}.$$

les λ, les μ et les ν étant commensurables. Ce qu'il faut surtout retenir, c'est qu'on peut choisir le système normal des périodes, de telle façon que les μ premières intégrales *normales* (*Cf.* Clebsch et Gordan, *Abelsche Functionen*, p. 107), qui correspondent à ce système soient précisément μ des intégrales réductibles.

Dans ces μ intégrales normales, les périodes de rang $2\mu+2$, $2\mu+4$, $2\mu+6$, ..., $2\rho-2$, 2ρ sont nulles; de plus il y a des relations linéaires à coefficients entiers :

1° Entre les périodes de rang $2\mu+1$, 2, 4, 6, ..., 2μ, 3, 5, 7, ..., $2\mu-1$;

2° Entre les périodes de rang $2\mu+3$, 4, 6, ..., 2μ, 5, 7, ..., $2\mu-1$.

3° Entre les périodes de rang $2\mu+5$, 6, 8, ..., 2μ, 7, 9, ..., $2\mu-1$;

. . . .

$\mu-1$° Entre les périodes de rang $4\mu-3$, $2\mu-2$, 2μ et $2\mu-1$;

μ° Entre les périodes de rang $4\mu-1$ et 2μ.

J'ai conservé pour les rangs des périodes le même mode de désignation que j'ai employé dans tout ce travail, de telle façon que la période de rang 2λ occupe la $\lambda^{\text{ième}}$ colonne dans le tableau (A), pendant que la période de rang $2\lambda - 1$ y occupe la $(\rho + \lambda)^{\text{ième}}$ colonne.

Ainsi se trouve généralisé le second théorème de M. Weierstrass, dont il est inutile de faire ressortir l'analogie avec l'un des plus beaux résultats de M. Picard.

8. La démonstration qui fait l'objet du paragraphe précédent peut se présenter sous une forme un peu différente.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$ un système de périodes normales de nos ρ intégrales abéliennes, et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2\mu}$ un système primitif quelconque de périodes des μ intégrales réduites.

On aura, pour une quelconque des intégrales réductibles,

$$x_i = \Sigma_k \alpha_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, 2\rho;\ k = 1, 2, \ldots, 2\mu),$$

les α étant des coefficients entiers.

Appliquons à nos périodes les substitutions (11) et (12), de façon que le nouveau système soit encore normal.

1° Appliquons à toutes les paires de périodes la substitution (11), de façon à faire disparaître $\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}, \ldots, \alpha_{2\rho,1}$.

2° Appliquons ensuite aux deux dernières paires la substitution (12), de façon à faire disparaître $\alpha_{2\rho-1,1}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$, cette même substitution, de façon à faire disparaître $\alpha_{2\rho-3,1}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les $\alpha_{i,1}$ aient disparu, excepté $\alpha_{1,1}$.

3° Appliquons ensuite à toutes les paires de périodes, excepté à la première, la substitution (11), pour faire disparaître $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{6,2}, \ldots, \alpha_{2\rho,2}$.

4° Appliquons ensuite la substitution (12) aux deux dernières paires pour annuler $\alpha_{2\rho-1,2}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$ pour annuler $a_{2\rho-3,2}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les $\alpha_{i,2}$ aient disparu, excepté $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$ et $\alpha_{3,2}$.

5° Appliquons la substitution (11) à toutes les paires, sauf aux deux premières, de façon à annuler $\alpha_{6,3}, \alpha_{8,3}, \ldots, \alpha_{2\rho,3}$.

6° Faisons ensuite disparaître à l'aide de la substitution (12), tous les $\alpha_{i,3}$, excepté $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$ et $\alpha_{5,3}$.

En continuant de la sorte, on arrivera à avoir

(13) $$\alpha_{i,k} = 0, \quad i > 2k - 1.$$

Cela fait, nous allons chercher à faire disparaître les coefficients $\alpha_{i,k}$ où l'indice i est pair et plus grand que 2μ, il reste $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ coefficients qui ne sont pas encore nuls et qu'il faut annuler; mais cela ne pourra se faire qu'en faisant reparaître quelques-uns des coefficients qui avaient disparu dans les simplifications précédentes. Il faut s'arranger pour que les coefficients α_{ik} qui reparaîtront ainsi aient tous l'indice i impair. Pour cela, il faut que les périodes ξ aient été choisies convenablement, comme on va le voir.

Le choix des périodes ξ est resté jusqu'ici entièrement arbitraire. Mais il est clair que nous aurions pu remplacer les ξ par tout autre système équivalent, rien de ce qui précède n'en aurait été changé. Nous pouvons donc supposer que le choix des périodes ξ ait été fait avant la réduction, de la façon la plus convenable pour notre objet.

Voici comment nous pouvons supposer que ce choix a été fait.

Considérons les $\frac{2\mu(2\mu-1)}{2}$ formes bilinéaires

$$\Phi_{pq} = \Sigma_k(\alpha_{2k-1,p}\alpha_{2k,q} - \alpha_{2k,p}\alpha_{2k-1,q}) \quad (k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Les substitutions (11) et (12) changent ces formes en elles-mêmes.

Il reste à voir ce qui arrive quand on remplace le système des ξ par un système équivalent.

Posons

$$\xi_p = \Sigma\beta_{pr}\xi'_r$$

avec

$$x_i = \Sigma\alpha'_{ik}\xi'_k,$$

il viendra

$$\alpha'_{ir} = \Sigma_p\beta_{pr}\alpha_{ip}.$$

Nos formes Φ seront devenues

$$\Phi'_{rs} = \Sigma(\alpha'_{2k-1,r}\alpha'_{2k,s} - \alpha'_{2k,r}\alpha'_{2k-1,s})$$

ou

$$\Phi'_{rs} = \Sigma(\beta_{pr}\beta_{qs} - \beta_{ps}\beta_{qr})\Phi_{pq}.$$

Supposons, en particulier, que la substitution qui fait passer des ξ aux ξ' ne porte que sur les $2\mu-1$ derniers ξ, de telle sorte que

$$\beta_{1,1}=1, \quad \beta_{1,k}=\beta_{k,1}=0 \quad (k=2, 3, \ldots, 2\mu).$$

Il viendra

$$\Phi'_{1,s}=\Sigma\beta_{q,s}\Phi_{1,q}.$$

On pourra donc toujours choisir les β de telle façon que

$$\Phi'_{1,s}=0 \quad (s=2, 3, \ldots, 2\mu-1).$$

En conséquence, on peut toujours supposer que les ξ aient été choisis de telle sorte que tous les $\Phi_{1,q}$ soient nuls, excepté $\Phi_{1,2\mu}$. De plus, cette propriété ne sera pas altérée par une substitution linéaire ne portant que sur

$$\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{2\mu-1}.$$

En raisonnant de la même façon, on verrait qu'on peut trouver une substitution linéaire ne portant que sur $\xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_{2\mu-1}$, et telle que

$$\Phi'_{2,s}=0 \quad (s=3, 4, \ldots, 2\mu-2).$$

On peut donc toujours supposer que tous les $\Phi_{1,q}$ et les $\Phi_{2,q}$ sont nuls, sauf $\Phi_{1,2\mu}$, $\Phi_{2,2\mu}$, $\Phi_{2,2\mu-1}$. De plus, cette propriété n'est pas altérée par une substitution linéaire ne portant que sur

$$\xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_{2\mu-2}.$$

En continuant le même raisonnement, on verrait que l'on peut supposer que $\Phi_{p,q}$ est nul, toutes les fois que

$$p+q<2\mu+1.$$

J'aurais même pu, si cela avait été utile pour mon objet, montrer que l'on peut choisir les ξ de telle façon que les $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ formes $\Phi_{p,q}$ s'annulent, à l'exception de μ d'entre elles.

En effet, soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2\mu}$ les périodes d'une de nos μ intégrales, à l'aide desquelles s'expriment les périodes normales x_1, $x_2, \ldots, x_{2\rho}$ de cette même intégrale; soient, pour une seconde intégrale, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2\mu}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{2\rho}$ les périodes correspondantes aux ξ et aux x. On aura

$$\Sigma(x_{2k-1}y_{2k}-x_{2k}y_{2k-1})=\Sigma\Phi_{pq}(\xi_p\eta_q-\xi_q\eta_p).$$

Or on aura pu toujours choisir les ξ de telle façon que la forme bilinéaire du second membre soit *réduite*, et n'ait par conséquent que μ termes. Je supposerai que les μ termes qui ne s'annulent pas sont ceux qui ont pour coefficients

$$\Phi_{1,2\mu},\ \Phi_{2,2\mu-1},\ \Phi_{3,2\mu-2},\ \ldots,\ \Phi_{\mu,\mu+1}.$$

De plus, aucun de ces termes ne s'annulera, sans quoi l'invariant de notre forme bilinéaire serait nul ; ce qui est impossible (*Cf. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVII ; Picard et Poincaré, Note du 3 décembre 1883).

On aura donc

$$(14)\qquad \begin{cases} \Phi_{p,q}=0 & \text{si } p+q \gtrless 2\mu+1, \\ \Phi_{p,q} \gtrless 0 & \text{si } p+q=2\mu+1. \end{cases}$$

Les substitutions (11) et (12) n'altérant pas les formes Φ_{pq}, ces conditions subsisteront quand j'aurai annulé à l'aide de ces substitutions tous les α_{ik}, où $i > 2k-1$. Mais les conditions (13) et (14) entraînent les suivantes :

$$\alpha_{2h,k}=0 \quad \text{si} \quad h+k<2\mu+1.$$

Nous avons donc fait disparaître tous les α_{ik} lorsque l'indice i est plus grand que $2k-1$, ou lorsque, étant pair, il est plus petit que $4\mu+2-k$. Cela posé, nous allons faire disparaître le coefficient $\alpha_{2\mu+2,\mu+2}$, en appliquant la substitution (12) aux $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et $(\mu-1)^{\text{ième}}$ paires, puis le coefficient $\alpha_{2\mu+2,\mu+3}$ en appliquant la substitution (12) aux $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et $(\mu-2)^{\text{ième}}$ paire, puis le coefficient $\alpha_{2\mu+2,\mu+4}$ en opérant de même sur les $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et $(\mu-3)^{\text{ième}}$ paires, ..., puis enfin le coefficient $\alpha_{2\mu+2,2\mu}$, en opérant sur les $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et première paires.

On aura alors

$$\alpha_{2\mu+2,k}=0,$$

quel que soit k.

On opérera de la même façon sur les $(\mu+2)^{\text{ième}}$ et $(\mu-2)^{\text{ième}}$ paires pour faire disparaître $\alpha_{2\mu+4,\mu+3}$, puis sur les $(\mu+2)^{\text{ième}}$ et $(\mu-3)^{\text{ième}}$ paires pour annuler $\alpha_{2\mu+4,\mu+4}$, ... ; puis sur les $(\mu+2)^{\text{ième}}$ et première paires pour annuler $\alpha_{2\mu+4,2\mu}$. On aura alors

$$\alpha_{2\mu+4,k}=0,$$

quel que soit k.

On n'a qu'à continuer de la sorte pour avoir enfin

$$\alpha_{2h,k} = 0 \quad (h = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, \rho; \; k = 1, 2, \ldots, 2\mu).$$

Il est clair en effet qu'en opérant dans l'ordre que je viens d'indiquer, on pourra faire reparaître des coefficients α_{ik} que l'on aura fait disparaître antérieurement, mais *seulement si l'indice i est impair;* on n'aura pas à craindre de faire reparaître des coefficients α_{ik} dont le premier indice sera impair.

Il résulte de là qu'après toutes ces transformations les périodes paires des $\rho - \mu$ dernières paires seront nulles dans nos μ intégrales réductibles. Mais ces μ intégrales ont été jusqu'ici choisies arbitrairement. On peut toujours les remplacer par μ quelconques de leurs combinaisons linéaires. Or le choix de ces combinaisons linéaires peut être fait de telle façon que, dans la première d'entre elles, la période de rang 2 soit égale à 1, et les périodes de rang 4, 6, 8, ..., 2μ égales à zéro; que dans la deuxième d'entre elles la période de rang 4 soit égale à 1 et les périodes de rang 2, 6, 8, ..., 2μ égales à zéro, ...; qu'enfin dans la $\mu^{\text{ième}}$ d'entre elles la période de rang 2μ soit égale à 1, et les périodes de rang 2, 4, 6, ..., $2\mu - 2$ égales à zéro.

Par conséquent, si nos μ intégrales sont choisies de la sorte, toutes les périodes de rang pair seront nulles dans chacune d'elles, excepté une qui sera égale à 1. *Ce seront donc des intégrales normales.* C. Q. F. D.

Ainsi se trouve démontré, par des méthodes purement arithmétiques, ce théorème si utile dans la théorie des fonctions abéliennes, ce qui prouve une fois de plus que l'analyste ne saurait se passer du secours de la théorie des nombres.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 2 NOVEMBRE 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Communications :

M. Poincaré : *Sur les groupes continus contenus dans le groupe linéaire à n variables.*

M. Lucien Lévy : *Sur une généralisation du problème des développées.*

M. d'Ocagne : *Sur une généralisation de l'inversion des courbes.*

SÉANCE DU 16 NOVEMBRE 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Démission : M. Perrin, vice-président, envoie sa démission de vice-président, motivée par son départ de Paris.

Communications :

M. Picard : *Sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu.*

M. André : *Sur la probabilité pour qu'une permutation donnée de n lettres soit une permutation alternée.*

M. Laguerre : *Sur un théorème d'Algèbre élémentaire.*

M. Perott adresse un Mémoire : *Sur le problème des fous.*

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XII. — N° 5.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1884

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publié au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.



Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par se travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

SÉANCE DU 7 DÉCEMBRE 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Communications :

M. Lucien Lévy : *Sur le complexe des normales aux ellipsoïdes homofocaux.*

M. Fouret : *Sur deux théorèmes concernant deux systèmes de polygones réguliers d'un même nombre de côtés.*

SÉANCE DU 21 DÉCEMBRE 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Démissions : M. Cheysson adresse sa démission de Membre de la Société.

M. Kœnigs adresse sa démission de vice-secrétaire, motivée par son éloignement de Paris.

Communications :

M. André : *Sur le nombre des permutations de n éléments, qui ont* S *séquences.*

M. Laguerre : *Sur les racines des équations transcendantes.*

Sur la proposition de M. Schlömilch, de Dresde, la Société échange les onze volumes parus de son Bulletin contre les tomes XVIII à XXVIII du journal *Zeitschrift für Mathematik und Physik.*

Le journal *Archiv für Mathematik und Physik,* dirigé par M. Hoppe, professeur à l'Université de Berlin, accepte l'échange de ses publications avec le Bulletin de la Société.

SÉANCE DU 4 JANVIER 1884.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Le Bureau et le Conseil sont renouvelés comme l'indique l'état qui est au commencement du volume.



Élection : M. Raffy, agrégé-préparateur à l'École Normale, présenté dans la dernière séance par MM. Appell et Picard, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Jordan : *Sur l'intégration approchée des équations différentielles à l'aide des quadratures.*

M. David envoie une Note manuscrite intitulée : *Sur une transformation de l'équation différentielle linéaire d'un ordre quelconque.*

SÉANCE DU 18 JANVIER 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

M. Fouret lit le Rapport sur l'état de la Société, au point de vue financier, à la fin de l'année 1883.

Élections : M. Deruyts, docteur ès sciences, assistant de Physique à l'Université de Liège, présenté dans la dernière séance par MM. Le Paige et Picquet, est élu membre de la Société.

M. Sophus Lie, professeur à l'Université de Christiania, présenté dans la dernière séance par MM. Halphen et Stephanos, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Laguerre : *Sur les limites des valeurs que peut prendre un polynôme.*

M. d'Ocagne : *Sur une étude géométrique de la distribution des efforts autour d'un point dans une poutre rectangulaire.*

M. d'Ocagne dépose un Mémoire manuscrit sur le même sujet.

M. Weill : *Sur des polygones dont tous les sommets sont situés sur une courbe algébrique ou transcendante.*

M. Fouret : *Sur une généralisation de la spirale hyperbolique.*

SÉANCE DU 1er FÉVRIER 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élection : M. Arnaud, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, présenté dans la dernière séance par MM. d'Ocagne et Weill, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Stephanos : *Sur la décomposition d'une forme binaire en une somme de puissances d'expressions linéaires.*

M. Raffy : *Sur le genre des fonctions algébriques à plusieurs variables.*

M. Picard présente quelques observations sur la Communication de M. Raffy.

M. Picard : *ur une classe de fonctions* θ.

SÉANCE DU 15 FÉVRIER 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élections : M. Thomas Craig, professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore, présenté dans la dernière séance par MM. Poincaré et Picard; M. Marchand, ancien élève de l'École Polytechnique, présenté dans la dernière séance par MM. Collignon et E. Lemoine; M. Mercereau, licencié ès sciences, présenté dans la dernière séance par M. le général Parmentier et M. Stéphanos, sont élus Membres de la Société.

Communications :

M. Haton de la Goupillière : *Sur une propriété de la cycloïde qui constitue la courbe d'équilibre pour les tractions mécaniques en rampe.*

M. Picard : *Sur les formes quadratiques indéfinies et sur une classe de fonctions abéliennes.*

SÉANCE DU 7 MARS 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élections : M. John Casey, professeur à l'Université catholique de Dublin, présenté dans la dernière séance par MM. Hermite et Picard; M. Artemas Martin, maître ès Arts, docteur en Philosophie à Érié (Pensylvanie), présenté dans la dernière séance par MM. Picquet et Fouret, sont élus Membres de la Société.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur un système de coordonnées propres à étudier certaines courbes.*

M. Weill : *Sur les tangentes à certaines courbes.*

M. d'Ocagne présente des observations sur cette Communication.

M. Raffy : *Sur un théorème de M. Hermite, relatif aux intégrales pseudo-elliptiques.*

M. André : *Sur un théorème qui permet d'abaisser la limite donnée par le théorème de Descartes.*

M. Picard : *Sur un groupe de transformations des points de l'espace.*

M. Picard dépose un Mémoire manuscrit sur ce sujet.

SÉANCE DU 21 MARS 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élection : M. l'abbé Pautonnier, professeur au Collège Stanislas, présenté dans la dernière séance par MM. Hermite et Picard, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Stephanos : *Sur la loi de réciprocité des fonctions symétriques.*

M. Poincaré : *Sur une équation différentielle considérée par M. Gyldén.*

SÉANCE DU 4 AVRIL 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Communications :

M. Raffy : *Sur les transformations invariantes des différentielles elliptiques.*

M. Stephanos : *Sur les déterminants gauches.*

M. Picard : *Sur la forme des intégrales des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de certains points critiques* et *Sur les groupes hyperabéliens.*

SÉANCE DU 2 MAI 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élection : M. Henriot, ingénieur des Mines, à Charleville, présenté dans la dernière séance par MM. Picquet et Poincaré, est élu Membre de la Société.

Communication :

M. Poincaré : *Sur une méthode de M. Gyldén.*

SÉANCE DU 16 MAI 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élections : M. Pucciarelli, répétiteur au Lycée Saint-Louis, présenté dans la dernière séance par MM. Picard et Poincaré; M. Trasbot, ancien élève de l'École Polytechnique, présenté dans la dernière séance par MM. Laisant et Lucas, sont élus Membres de la Société.

Communications :

M. Laguerre : *Sur une certaine transformation des surfaces déduite de la considération des anticaustiques.*

M. Halphen : *Sur la fonction* $\zeta(z)$ *de Dirichlet.*

M. d'Ocagne : *Sur une transformation des propriétés angulaires.*

M. Raffy : *Sur la ramification d'une fonction algébrique dans le voisinage d'un point critique.*

SÉANCE DU 6 JUIN 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Communications :

M. Lemoine : *Sur une propriété d'un point du plan d'un triangle.*

M. Halphen : *Sur la courbe élastique.*

SÉANCE DU 20 JUIN 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

M. Goursat adresse un Mémoire manuscrit *Sur l'intégration de quelques équations linéaires au moyen des fonctions doublement périodiques.*

M. d'Ocagne adresse un Mémoire manuscrit *Sur une série à loi alternée.*

SÉANCE DU 4 JUILLET 1884.

PRÉSIDENCE DE M. STEPHANOS.

Élection : M. Simonnet, chef d'escadron d'Artillerie, présenté à la dernière séance par MM. Jordan et Vicaire, est élu Membre de la Société.

Communication :

M. Stephanos : *Sur la théorie d'élimination.*

SÉANCE DU 19 JUILLET 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Démission : M. A. de Presles adresse sa démission de Membre de la Société.

Communication :

M. Picard : *Sur les fonctions hyperabéliennes et les intégrales de différentielles totales de première espèce.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DU 20 JUILLET 1883 AU 19 JUILLET 1884.

De Longchamp, *Traité d'Algèbre*

Dr Schubert, *Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben.* Potsdam, 1883.

M.-P. del Pezzo, *Sulla curva hessiana.*

Ces deux derniers Ouvrages, ayant appartenu à M. Chasles, sont offerts à la Société par M. Clayeux.

Jordan, *Cours d'Analyse,* second volume.

Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie,* cinquième édition.

Le Paige, *Sur les surfaces du troisième degré.* Extrait des *Acta mathematica.*

V. Liguine, *Liste des travaux sur les systèmes articulés.* Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques.*

Émil Weyr, *Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven von Geschlechte Eins.* Extrait des *Sitzungsberichte de l'Académie de Vienne.*

Jung, *Sui sistemi privi di baricentro.* Extrait des *Rendiconti del Istituto Lombardo.*

J. Perott, *Sur la formation des déterminants irréguliers.* Extrait du *Journal de Kronecker.*

L. R., *Ueber die Methoden in der botanischen Systematik.* Envoi de l'Académie des Sciences de Munich.

G. Bauer, *Gedächtnissrede auf Otto Hesse,* München, 1882. Envoi de la même Académie.

Schwarz, *Beweis des Satzes dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens.* Extrait des *Nachrichten de Göttingen.*

Starkoff, *K'Voprosu o Poverkhnosti naimenichtchago soprotivlenia pri dvijenii v'nesjimaemoï jidkosti.*

— *Zur Frage über die Integration linearer differential Gleichungen.*

— *O Poverkhnostikh onimaiouchtchikh Vsie prolojenii dirjuchtcheisi spheri peremiennago raduisa.*

— *Oichtchii integral uravnenii s'tchastnimi proïzvodnimi n'go poridka vida*

$$\frac{d^n Z}{d\varphi\, d\xi \ldots d\varphi\, \partial\omega} = \Psi(\varphi, \xi, \ldots \psi, \omega) Z + \Phi(\varphi, \xi, \ldots \psi, \omega).$$

— *Oichtchii Sposoï integrirovanii lineinikh differencialinich uravneini s'peremiennimi koeficientami.*

— *K'Voprosu oï integrirovanii sovobupnich differencialinich uravnenii.*

— *Oï oiertkach krugov i chtcharov pereminiich radiusov.*

Galopin, *Théorie des approximations numériques.*

— *Commemorazione funebre del deputato Sella.* Extrait des *Actes parlementaires de la Chambre des députés italienne* (séance du 15 mars 1884).

Paul Marjor, *Du maintien d'un corps dans l'espace au moyen d'une force motrice.*

— *Traction sur chemin de fer.*

J. Perott, *Sur la formation des déterminants irréguliers.*

Starkoff, *O Slojnich procentack i tekuchtchich stchetach.*

— *O formul* (H)

$$y = (-1)^n \int Q_1\, dx \int Q_2\, dx \ldots \int Q_{n-1}\, \partial x \int Q_n y\, \partial x.$$

Remarque sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques; par M. Émile Picard.

(Séance du 7 novembre 1884.)

Dans un Mémoire extrêmement intéressant, qui vient de paraître dans le tome IV des *Acta mathematica,* Mme Kowalewsky cite le théorème suivant, qui lui a été communiqué par M. Weierstrass, et dont M. Poincaré vient de donner une démonstration :

Si, d'une fonction $\mathfrak{I}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\rho, \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$, *on peut, par une transformation de degré* k, *passer à une autre qui soit le produit d'une fonction* $\mathfrak{I}$ *de* $(\rho - 1)$ *variables et d'une fonction* $\mathfrak{I}$ *d'une variable, on peut toujours, par une transformation du premier degré, la transformer en une autre* $\mathfrak{I}(\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_\rho, \bar{\tau}_{11}, \ldots, \bar{\tau}_{\rho\rho})$, *dans laquelle*

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{\mu}{k}, \quad \tau_{13} = \tau_{14} = \ldots = \tau_{1\rho} = 0,$$

où μ *représente un des nombres* $1, 2, \ldots, (k-1)$.

Je me suis, il y a quelques années, occupé de la question de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques, dans le cas où $\rho = 2$, et j'ai énoncé de la manière suivante une propostion analogue à la précédente (*Comptes rendus,* 1881, et *Bulletin de la Société mathématique,* 1882) :

Dans le cas où, pour une courbe du second genre, il y a une intégrale abélienne de première espèce, ayant seulement deux périodes, on peut toujours, par une transformation du premier degré, *obtenir un système d'intégrales normales dont le Tableau des périodes soit*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & G & \frac{1}{D} \\ 1 & 0 & \frac{1}{D} & G' \end{array} \right.$$

Ce résultat ne coïncide pas entièrement avec celui de M. Weierstrass; d'après le premier théorème, on affirme seulement, en

effet, que l'on pourra avoir le Tableau de périodes

$$(2)\qquad \begin{cases} 0 & 1 & G & \dfrac{\mu}{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\mu}{k} & G' \end{cases}$$

k étant un nombre positif et μ un des nombres $1, 2, \ldots (k-1)$.

Je ne sais si, dans le cas général, on pourrait préciser davantage la forme de τ_{12} ([1]); mais, pour le cas de $\rho = 2$, on peut certainement arriver à la forme (1) : cela résulte de la démonstration que j'ai donnée dans le Mémoire cité; mais il ne sera pas sans intérêt de montrer directement que l'on peut, *par une transformation du premier degré*, passer d'un Tableau de la forme (2) à un Tableau de la forme (1).

Une transformation du premier degré transforme d'une manière générale un Tableau de périodes

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & G' & H \\ 1 & 0 & H & G \end{vmatrix},$$

en un autre

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & G'_1 & H_1 \\ 1 & 0 & H_1 & G_1 \end{vmatrix},$$

où l'on a, pour G_1, H_1, G'_1, les valeurs données par M. Hermite. Je me bornerai à écrire la valeur de H_1

$$(3)\qquad H_1 = \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}G + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]H + (ad)_{02}G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},$$

où l'on a posé d'une manière générale

$$(ad)_{ij} = a_i d_j - a_j d_i.$$

Les a, b, c, d sont des entiers vérifiant les relations

$$(4)\qquad \begin{cases} a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 = a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 = 1, \\ a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 - d_0 a_1 = 0, \\ a_0 d_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 - d_0 a_2 = 0, \\ a_1 d_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 - d_1 a_3 = 0, \\ a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 - d_2 a_3 = 0. \end{cases}$$

([1]) La question vient d'être examinée par M. Poincaré.

Or partons du système (2) où nous supposons μ et k premiers entre eux, et faisons-lui subir la transformation (a, b, c, d), dans laquelle on a

$$\begin{array}{llll} a_0 = 0, & a_1 = 1, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_0 = \mu, & b_1 = -\mu, & b_2 = 0, & b_3 = k, \\ c_0 = -c_1, & c_1, & c_2 = 0, & c_3, \\ d_0 = 0, & d_1 = 0, & d_2 = 1, & d_3 = 1; \end{array}$$

c_1 et c_3 sont deux entiers uniquement assujettis à satisfaire à la relation

$$\mu c_3 + k c_1 = 1.$$

On voit d'abord que toutes les relations (4) sont vérifiées. Cherchons la valeur de H_1, en partant de la formule (3), où nous faisons $H = \frac{\mu}{k}$.

On trouve de suite

$$H_1 = \frac{1}{k}.$$

Nous aurons donc bien un Tableau de la forme (1), et l'entier D qui y figure est égal à k.

Sur les nombres pseudo-symétriques; par M. Émile Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique.

(Séance du 7 novembre 1884.)

Dans ce qui suit, nous désignerons toujours par x la base du système de numération.

Nous dirons qu'un nombre de $2n$ chiffres est parisymétrique si les chiffres à égale distance des extrêmes sont égaux. Exemple :

2552.

Qu'un nombre de $2n+1$ chiffres est imparisymétrique, quel que soit le chiffre du milieu, si les chiffres à égale distance des extrêmes sont égaux. Exemple :

25652.

Nous appellerons *pseudo-parisymétrique* un nombre de $2n$ chiffres, tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit constante ou nulle; la valeur de la constante se nomme l'*échelle*.

Nous appellerons *pseudo-imparisymétrique* un nombre de $2n+1$ chiffres, tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit constante ou nulle, et que le chiffre du milieu soit nul ou égal à la moitié de la constante (si celle-ci est paire); la valeur de la constante se nomme l'*échelle*.

Exemples :

$$807004600302, \qquad 73$$

sont pseudo-parisymétriques à échelle 10;

$$603147502, \qquad 603107502$$

sont pseudo-imparisymétriques à échelle 8.

Nous désignerons par A, B, C, ... des nombres quelconques (le premier chiffre à gauche n'étant jamais zéro), et par a, b, c, ... ces mêmes nombres, lus de droite à gauche.

Exemples : si

$$A = 5382, \quad B = 1560,$$

on aura

$$a = 2835, \quad b = 651.$$

Nous désignerons respectivement par N_a, N_b, N_c, ... les sommes $A + a$, $B + b$, $C + c$, ...

Rappelons encore le théorème suivant, que nous avons démontré au congrès de Blois :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $N_a = N_b$, A *et* B *étant des nombres d'un même nombre de chiffres, est que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes dans* A *soit égale à la somme des chiffres correspondants dans* B.

Nous déduirons de ce théorème la proposition suivante, très facile à démontrer :

Théorème I. — *Si* A, B, C, ... *sont des nombres pseudo-symétriques de même échelle, d'un même nombre de chiffres, et*

où les zéros, s'il y en a, occupent le même rang, on aura

$$N_a = N_b = N_c = \ldots;$$

et, réciproquement, si les zéros n'occupent pas le même rang dans tous ces nombres, N_a, N_b, N_c, ... *seront différents.*

Exemples :

804905	608507
509408	705806
1314313	1314313
500309208006	400503806007
600802903005	700608305004
1101112111011	1101112111011

On conclut de là que, pour trouver le nombre P_n de valeurs différentes que peut prendre la somme N_a si A prend toutes les valeurs qui en feront un nombre pseudo-symétrique de n chiffres et d'échelle p, il suffit de compter, dans un nombre pseudo-symétrique de n chiffres, de combien de façons différentes peuvent être placés les zéros, les chiffres significatifs étant indifférents.

Comme il s'agit de nombres pseudo-symétriques où, par conséquent, les zéros sont toujours deux à deux à égale distance des extrêmes, il suffira, si $n = 2m$, de chercher de combien de façons différentes des zéros peuvent entrer dans un nombre de m chiffres, dont le dernier chiffre à droite n'est pas nul.

Si $n = 2m + 1$ et l'échelle impaire, le chiffre du milieu étant toujours nul, on trouvera le même nombre.

Si l'échelle est paire, le chiffre du milieu pouvant être soit zéro, soit la moitié de l'échelle, on trouve un nombre double.

Problème I. — A *étant un nombre pseudo-symétrique de* n *chiffres et d'échelle* p, *trouver le nombre* P_n *de valeurs différentes que peut prendre la somme* N_a

1° $$p = 2p' + 1, \quad n = 2m.$$

A est un nombre pseudo-parisymétrique de $2m$ chiffres. Il n'y a qu'une valeur pour N_a, si A ne contient pas de zéro.

Soit N_1, N_2, N_3, ..., N_{m-1} le nombre des valeurs de N_a, si A

contient 2, 4, 6, ... $2(m-1)$ zéros; on aura évidemment

$$N_1 = \frac{m-1}{1},$$

$$N_2 = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2},$$

$$N_3 = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et

$$P_n = 1 + N_1 + N_2 + \dots$$

ou

$$P_n = 1 + \frac{m-1}{1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} + \dots + \frac{m-1}{1} + 1$$

ou

$$P_n = 2^{m-1} = 2^{\frac{n}{2}-1}.$$

Si $n = 2m+1$, le nombre A sera pseudo-imparisymétrique et P_n aura la même valeur $2^{m-1} = 2^{\frac{n-1}{2}-1}$ que précédemment, puisque le chiffre du milieu est toujours zéro

2° $$p = 2p', \quad n = 2m.$$

On a encore

$$P_n = 2^{m-1} = 2^{\frac{n}{2}-1};$$

mais, si $n = 2m+1$, on a

$$P_n = 2^m = 2^{\frac{n-1}{2}},$$

car le chiffre du milieu de A peut être soit o, soit p'.

Théorème II. — *Tout nombre parisymétrique de* $2n$ *chiffres est de la forme* $A + a$, A *ayant* $2n$ *chiffres.*

Démonstration très simple. — Exemple :

5670110765

provient de

A =	5070010060	ou de	5370010030
a =	0600100705		0300100735
	5670110765		5670110765

De même :

Théorème III. — *Tout nombre imparisymétrique de $2n+1$ chiffres, et dont le chiffre du milieu est pair ou nul, est de la forme* $A+a$, A *ayant* $2n+1$ *chiffres.*

Théorème IV. — *Si* A *est un nombre pseudo-parisymétrique d'échelle* $p<x$, N_a *est un nombre parisymétrique du même nombre de chiffres et dont tous les chiffres sont p ou* 0.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 508104 \\ 401805 \\ \hline 909909 \end{array}$$

Soit maintenant A un nombre pseudo-parisymétrique de $2n$ chiffres, dont l'échelle p est x ou plus grande que x.

Soit α le premier chiffre à gauche de A.

Soit α' le premier chiffre à droite de A.

On a

$$\alpha+\alpha'=p,$$

mais

$$p\geq x \quad \text{et} \quad p<2x-1;$$

donc N_a aura $2n+1$ chiffres, et son premier chiffre à gauche sera l'unité.

Pour que N_a soit symétrique, il faut que le dernier chiffre à droite soit aussi l'unité, ce qui, puisque $p>x$, exige $p=x+1$; pour toute autre valeur de p, parmi celles plus grandes que x ou pour celle égale à x, N_a ne pourra donc pas être symétrique.

Je dis que si $p=x+1$, N_a est effectivement symétrique.

Soit

$$A=a_1\ a_2\ldots a_j\ a_{j+1}\ a_{j+2}\ldots a_n\ a'_n\ldots a'_{j+2}\ a'_{j+1}\ a'_j\ldots a'_2\ a'_1$$

un nombre pseudo-parisymétrique, tel que, a_k et a_k représentant deux chiffres quelconques à égale distance des extrêmes, on ait

$$a_k+a'_k=x+1 \quad \text{ou} \quad a_k+a'_k=0$$

pour toute valeur de k

Comme $a_1+a'_1=x+1$, N_a a $2n+1$ chiffres, puisque le dernier chiffre à gauche de A n'est jamais zéro.

Pour que N_a soit imparisymétrique, il faut que, dans l'addition faite en commençant par la droite comme à l'ordinaire, le chiffre provenant de $a'_j + a_j$ (en tenant compte de la retenue s'il y en a) soit égal au chiffre provenant (sur la gauche) de l'addition de $a_{j-1} + a'_{j-1}$ (en tenant compte de la retenue s'il y a lieu)

$$\begin{array}{lll} a & = & a'_1\ a'_2 \ldots a'_{j-1}\ a'_j\ a'_{j+1} \ldots a'_n\ a_n \ldots a_{j+1}\ a_j\ a_{j-1} \ldots a_2\ a_1 \\ A & = & a_1\ a_2 \ldots a_{j-1}\ a_j\ a_{j+1} \ldots a_n\ a'_n \ldots a'_{j+1}\ a'_j\ a'_{j-1} \ldots a'_2\ a'_1 \\ \hline N_a & = & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{array}$$

Première hypothèse.........	2 ..... 2 .....
Deuxième hypothèse........	0 ..... 0 .....
Troisième hypothèse........	1 ..... 1 .....
Quatrième hypothèse........	1 ..... 1 .....

Il n'y a que quatre hypothèses possibles :

1° $$a_j + a'_j = x + 1 \quad \text{et} \quad a'_{j-1} + a_{j-1} = x + 1,$$

il y a retenue des deux côtés, et les deux chiffres sont des 2;

2° $$a_j + a'_j = 0 \quad \text{et} \quad a'_{j-1} + a_{j-1} = 0,$$

les deux chiffres sont des 0;

3° $$a_j + a'_j = x + 1 \quad \text{et} \quad a'_{j-1} + a_{j-1} = 0,$$

les deux chiffres sont des 1;

4° $$a_j + a'_j = 0 \quad \text{et} \quad a'_{j-1} + a_{j-1} = x + 1,$$

les deux chiffres sont des 1.

Le chiffre du milieu provient de l'addition

$$\begin{array}{c} \ldots a_n\ a'_n \ldots \\ \ldots a'_n\ a_n \ldots \\ \hline \end{array}$$

Première hypothèse....	$a_n + a'_n = x + 1$	... 2 ...
Seconde hypothèse.....	$a_n + a'_n = 0$	... 0 ...

On voit donc que les chiffres à égale distance des extrêmes sont égaux, que leur valeur est 0, 1 ou 2;

Que le chiffre du milieu ne peut être que 2 ou 0.

En continuant la discussion de la même manière, on verrait que, dans N_a, un 0 ne pourra avoir à sa droite (et par suite à sa gauche, puisque N_a est symétrique) un nombre impair de 1 consécutifs; que jamais un 0 et un 2 ne pourront se trouver à côté l'un de

l'autre; que un 2 ne peut avoir à sa droite (et par suite à sa gauche) un nombre pair de 1 consécutifs.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Si* A *est un nombre pseudo-parisymétrique de* $2n$ *chiffres et d'échelle* $x+1$, N_a *sera un nombre imparisymétrique de* $2n+1$ *chiffres, qui ne pourront être que* 0, 1 *ou* 2, *les chiffres extrêmes seront* 1, *le chiffre du milieu ne sera jamais* 1; *un* 0 *ne pourra jamais avoir à sa droite ou à sa gauche un nombre impair de* 1 *consécutifs; jamais un* 0 *et un* 2 *ne pourront se trouver l'un près de l'autre; un* 2 *ne peut avoir à sa droite ou à sa gauche un nombre pair de* 1 *consécutifs; si l'échelle est* x *ou* $> x+1$, N_a *ne peut être symétrique.*

On démontre d'une façon tout à fait semblable les deux théorèmes suivants, qui sont analogues aux théorèmes IV et V.

THÉORÈME VI. — *Si* A *est un nombre pseudo-imparisymétrique* ($2n-1$ chiffres) *dont l'échelle* p *est plus petite que la base* x, N_a *est un nombre imparisymétrique* ($2n-1$ *chiffres*), *dont les chiffres sont* p *ou* 0.

THÉORÈME VII. — *Si* A *est un nombre pseudo-imparisymétrique* ($2n-1$ *chiffres*) *dont l'échelle est* $x+1$, N_a *est un nombre parisymétrique de* $2n$ *chiffres, qui ne pourront être que* 0, 1 *ou* 2; *les chiffres extrêmes seront* 1; *les deux chiffres du milieu seront deux* 1 *ou deux* 0 *si* x *est pair, deux* 0, *deux* 1 *ou deux* 2 *si* x *est impair; un* 0 *ne pourra jamais avoir à sa droite* (*ou à sa gauche*) *un nombre impair de* 1 *consécutifs; jamais un* 0 *et un* 2 *ne pourront se trouver l'un près de l'autre; un* 2 *ne peut avoir à sa droite* (*ou à sa gauche*) *un nombre pair de* 1 *consécutifs; si l'échelle est* x *ou* $> x+1$, N_a *ne peut être symétrique*

Remarque I. — Soit A un nombre pseudo-parisymétrique de $2n$ chiffres; nous avons démontré que $N_a = A + a$ sera un nombre imparisymétrique de $2n+1$ chiffres, dont le chiffre du milieu est 2 ou 0, et par suite, d'après le théorème III, il sera aussi de la forme $B+b$, B étant un nombre de $2n+1$ chiffres.

Remarque II. — Soit A un nombre pseudo-imparisymétrique de $2n - 1$ chiffres; nous avons démontré que $N_a = A + a$ sera un nombre parisymétrique de $2n$ chiffres, et par suite, d'après le théorème II, il sera de la forme $B + b$, B étant un nombre de $2n$ chiffres. Donc, en général :

Théorème VIII. — *Si* A *est pseudo-symétrique de n chiffres,* $N_a = A + a$ *sera aussi de la forme* $B + b$, B *ayant* $n + 1$ *chiffres; dans ce cas, nous dirons que le nombre* N_a *est doublement de la forme* N.

Nous pourrions, dans ces recherches, employer une méthode un peu différente que nous allons indiquer sommairement.

Supposons A pseudo-symétrique d'échelle $x + 1$; puisque N_a, d'après le théorème I, ne dépend que de la place des o dans A, il n'y a pas à distinguer entre eux les chiffres significatifs, et nous désignerons par l et l' deux chiffres quelconques à égale distance des extrêmes et tels que $l + l' = x + 1$ $\left(\text{si } x \text{ est impair, le chiffre du milieu pourra être } \frac{x+1}{2}\right)$.

Cela posé, A se composera de droite à gauche (ou de gauche à droite, puisqu'il est pseudo-symétrique) :

D'un groupe de p chiffres l (p étant au moins 1),
» q » o (q peut être zéro).
» r » l (r »),
» s » o (s »),
. . . .

$$\begin{array}{rl} & \overset{p}{\overline{}}\ \overset{q}{\overline{}}\ \overset{r}{\overline{}}\ \overset{s}{\overline{}}\qquad\qquad\qquad \overset{s}{\overline{}}\ \overset{r}{\overline{}}\ \overset{p}{\overline{}}\ \overset{r}{\overline{}} \\ A = & l\ldots l\ o\ldots o\ l\ldots l\ o\ldots o\ l -.-.-.- l'o\ldots o\ l'\ldots l'o\ldots o\ l'\ldots l' \\ a = & l'\ldots l'o\ldots o\ l'\ldots l'o\ldots o\ l' -.-.-.- l\ o\ldots o\ l\ldots l\ o\ldots o\ l\ldots l \\ \hline & \overset{p}{\overline{}}\ \overset{q}{\overline{}}\ \overset{r}{\overline{}}\ \overset{s}{\overline{}}\qquad\qquad\qquad \overset{s}{\overline{}}\ \overset{r}{\overline{}}\ \overset{q}{\overline{}}\ \overset{p}{\overline{}} \\ N_a = & 1\ 2\ldots 2\ 1\ 0\ldots 0\ 1\ 2\ldots 2\ 1\ 0\ldots 0\ 1\ l' -.-.-.- 1\ 0\ldots 0\ 1\ 2\ldots 2\ 1\ 0\ldots 0\ 1\ 2\ldots 2\ 1 \end{array}$$

On voit immédiatement que $A + a$ commence et finit par 1; qu'il a un chiffre de plus que A, etc., et l'on pourrait démontrer les théorèmes V et VII.

Théorème IX. — *Si un nombre* M *de* $n + 1$ *chiffres est doublement de la forme* N, *c'est-à-dire si ce nombre est la somme d'un nombre* A *de n chiffres et de ce nombre renversé,*

et en même temps la somme d'un nombre B *de* $n+1$ *chiffres et de ce nombre renversé, et si de plus* B *est tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit plus petite que* x, A *sera un nombre pseudo-symétrique à échelle* $x+1$.

Remarquons d'abord que $A < x^n$: donc $A + a < 2x^n$, donc le premier chiffre à gauche de M est 1.

Posons les additions de $A + A$ et de $B + b$, et remarquons encore que l'addition $B + b$ montre que M est un nombre symétrique, puisque, k étant quelconque, $b_n + b_{n-k}$ est plus petit que x; on a

$$\begin{array}{rcccccccccc}
A = & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots\ldots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
a = & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\
\hline
M = A + a = & 1 \; 2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 2 & 1 \\
 & \;\;1 & & & & & & & & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
B = & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots\ldots & b_3 & b_2 & b_1 \;\; b_0 \\
b = & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots\ldots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} \;\; b_n \\
\hline
M = B + b = & 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 2 \;\;\; 1 \\
 & & 1 & & & & & & 1
\end{array}$$

M étant symétrique, puisque le premier chiffre à gauche de $A + a$ est 1, le chiffre des unités de M est aussi 1, ce qui donne

$$b_n = 1, \quad b_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_0 + a_{n-1} = x + 1;$$

en effet, $a_0 + a_{n-1}$ est 1 ou $x + 1$, puisque le dernier chiffre à droite de $A = a$ est 1; or il ne peut être 1, car $A + a$ n'aurait pas alors un chiffre de plus que A. Dans $A + a$, le deuxième chiffre à gauche est donc 2 ou 1, suivant qu'il y a une retenue venant de l'addition précédente ou qu'il n'y en a pas.

S'il est 2, le deuxième chiffre à droite de M est aussi 2, puisque M est symétrique, alors le deuxième chiffre à droite de l'addition $A + a$ montre que $a_1 + a_{n-2}$ est $x + 1$ ou 1; mais ce ne peut être 1, puisque, sur la gauche, la colonne où se trouve $a_1 + a_{n-2}$ a donné par hypothèse une retenue dans $a_1 + a_{n-2} = x + 1$ et, s'il est 1, le deuxième chiffre à droite de M est aussi 1; alors l'addition du deuxième chiffre à droite, dans $A + a$, montre que $a_1 + a_{n-1} = 0$ ou x; ce ne peut être x, puisqu'il n'y a pas de retenue (à gauche) dans la colonne de $A + a$ où se trouve $a_1 + a_{n-1}$: donc

$$a_1 + a_{n-1} = 0.$$

Examinons le cas où le deuxième chiffre est un 2, puis le cas où c'est un 1 :

1° Supposons qu'il y ait un 2 pour deuxième chiffre à droite et par suite, à gauche ; nous venons de voir que, alors,

$$a_1 + a_{n-2} = x + 1 ;$$

donc le troisième chiffre à gauche et, par suite, à droite de $A + a$ est encore un 2 ou un 1 ; un 2, s'il a une retenue venant de l'addition partielle de la troisième colonne à gauche, $a_{n-3} + a_2$. Ce qui exige $a_{n-3} + a_2 = x + 1$, puisque le troisième chiffre à droite de $A + a$ est 2, qu'il y a une retenue et que $a_{n-3} + a_2$ ne peut être l'unité, puisqu'une retenue provient de l'addition partielle de la troisième colonne à gauche. 2° Supposons un 1 pour troisième chiffre, il n'y a pas alors de retenue, etc.

Rien n'est plus facile que de continuer ainsi la démonstration, mais elle est longue à développer complètement ; nous nous bornerons, pour abréger, à cette indication de la méthode.

J'avais d'abord cru avoir démontré la proposition plus générale suivante :

Tout nombre qui est doublement de la forme N, *c'est-à-dire qui est de la forme* $A + a$, A *ayant n chiffres, et de la forme* $B + b$, B *ayant* $n + 1$ *chiffres, est tel que* A *est pseudo-symétrique d'échelle* $x + 1$.

Je remercie M. le sous-intendant militaire Delannoy, qui m'a montré que je faisais une hypothèse implicite ($b_k + b_{n-k} < x$), laquelle restreignait la généralité du théorème, et m'a donné l'exemple suivant :

Si $A = 77500534$, si $B = 104000710$, on a

$$A + a = B + b = 121001111,$$

et A n'est pas pseudo-symétrique d'échelle $x + 1$. C'est d'après cela que j'ai rectifié la démonstration et l'énoncé précédents.

Remarque. — Ce qui précède est vrai, quelle que soit la base x du système de numération, excepté dans le cas du système binaire, puisque nous avons supposé l'existence du caractère 2. Pour le système binaire, une étude toute différente doit être faite.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME X. — *Le nombre de nombres de $n+1$ chiffres, qui sont doublement de la forme* N, *c'est-à-dire le nombre de nombres de $n+1$ chiffres, qui sont à la fois de la forme* $A+a$, A *ayant n chiffres et de la forme* $B+b$, B *ayant $n+1$ chiffres est le même, quelle que soit la base x du système de numération, lorsque cette base est plus grande que 2 et que l'on suppose que, dans* B, *la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes est plus petite que x.*

Cela résulte immédiatement de ce qui précède.

Ce nombre est égal au nombre de nombres pseudo-symétriques de n chiffres d'échelle $x+1$ (ou plus généralement d'échelle de même parité que $x+1$).

Car il est évident qu'il y a autant de nombres pseudo-symétriques de n chiffres d'échelle p que de nombres pseudo-symétriques de n chiffres d'échelle p', quels que soient p et p', pourvu que p et p' soient de même parité; d'après le problème I, si p est impair et p' pair, il y a deux fois plus de nombres pseudo-symétriques d'échelle p' que de nombres pseudo-symétriques d'échelle p.

En résumé :

Le nombre de ces nombres de $n+1$ chiffres qui sont doublement de la forme N, *c'est-à-dire le nombre de nombres de $n+1$ chiffres, qui sont à la fois de la forme* $A+a$, A *ayant n chiffres, et de la forme* $B+b$, B *ayant $n+1$ chiffres, en supposant que, dans* B, *la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes est plus petite que x, est :*

Si x est pair et $n=2m$, $2^{m-1}=2^{\frac{n}{2}-1}$;

Si x est pair et $n=2m+1$, $2^{m-1}=2^{\frac{n-1}{2}-1}$;

Si x est impair et $n=2m$, $2^{m-1}=2^{\frac{n}{2}-1}$;

Si x est impair et $n=2m+1$, $2^{m}=2^{\frac{n-1}{2}}$.

Ces résultats ne s'appliquent pas au système binaire qu'il faut étudier à part pour la recherche des nombres qui sont doublement de la forme N, car nous nous sommes servis du caractère 2, qui manque dans le système binaire. Je n'ai pas encore traité ce pro-

blème, j'ai seulement vérifié qu'il n'y a pas de nombres doublement de la forme N avant

$$\overset{9}{1001} = \overset{6}{110} + \overset{3}{011} = \overset{8}{1000} + \overset{1}{0001};$$

qu'il n'y a pas de nombre de cinq chiffres qui soit doublement de la forme N; que

$$\overset{45}{101101} = \overset{30}{11110} + \overset{15}{01111} = \overset{36}{100100} \times \overset{9}{001001}$$

est le seul nombre de six chiffres qui soit doublement de la forme N; qu'il n'y a pas de nombre de sept chiffres qui soit doublement de la forme N; enfin que

$$10011001,\quad 10111101,\quad 1001001001,\quad 100101101001,\quad \ldots$$

sont doublement de la forme N, et que tous ces nombres sont symétriques.

Signalons encore l'intéressante question suivante :

A quel caractère reconnaît-on, dans la base x, qu'un nombre donné est de la forme N, *et, s'il est de la forme* N, *trouver la valeur* A?

J'ai déterminé, dans une Communication faite cette année au Congrès de l'Association française, à Blois, combien la somme $A + a$ prenait de valeurs différentes lorsque A a n chiffres. Si l'on se propose la question suivante : *Combien la somme* $A + a$ *prend-elle de valeurs différentes quand* A *varie de* 1 *à* x^n? La question se complique, parce qu'il faut ne compter qu'une fois les nombres qui sont doublement de la forme N, puisqu'on les rencontre comme somme $A + a$, A ayant n chiffres, et comme somme $A + a$, A ayant $n + 1$ chiffres. Nous rencontrerons d'abord, ainsi que nous venons de le voir, tous les nombres qui proviennent des nombres pseudo-symétriques d'échelle $x + 1$ dont cette Note donne le nombre, mais nous avons vu qu'il y en a encore d'autres; je n'ai pu trouver encore la loi de leur formation ni par suite essayer de les compter : c'est peut-être assez difficile.

La première fois que je me suis occupé de théorèmes où il s'agit de nombres et de ces nombres renversés, c'est au Congrès de Rouen, en 1883. Le général Parmentier a eu la bonté de me si-

gnaler, il y a quelques jours, dans le Mémoire relatif à cette Communication, une faute de calcul qui a donné lieu à une restriction inutile dans un des théorèmes énoncés; je saisis cette occasion de rectifier ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $K + K' = k + k'$, *si* K et K' *ont un nombre pair de chiffres, est que la somme de deux chiffres de même rang dans* K *et dans* K' *soit égale à la somme de leurs associés, c'est-à-dire des chiffres à égale distance des extrêmes dans* K *et dans* K' *que les chiffres considérés; s'ils ont un nombre impair de chiffres, il faut de plus que le chiffre du milieu soit commun.*

Cette restriction n'est nullement nécessaire; les chiffres du milieu de K et de K' peuvent, au contraire, être absolument quelconques.

L'erreur, qu'il eût été facile de reconnaître *a priori* sur des nombres, a été causée par cela que, dans l'équation (4) (*loc. cit.*), j'ai oublié d'écrire le terme $10^n a'_n$, et dans l'équation (5) le terme $10^n a_n$. La solution du problème qui suit ce théorème subit une légère modification trop facile à apercevoir pour qu'il y ait à insister ici sur ce point.

Sur les fractions algébriques qui représentent approximativement la racine carrée d'une variable, comprise entre les limites données; par M. Tchebicheff.

(Séance du 21 novembre 1884.)

Quand on cherche parmi toutes les fractions de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

$f(x)$, $F(x)$ n'étant pas d'un degré supérieur à n, celle dont le logarithme, depuis $x = \frac{1}{a} < 1$ jusqu'à $x = a > 1$, s'écarte le moins du logarithme de $\sqrt{x}$, on trouve une fraction qui peut être

présentée de la manière suivante :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^m \varphi\left(\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)\varphi\left(-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)}{\varphi(\sqrt{1-ax})\,\varphi(-\sqrt{1-ax})},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction d'un degré m, qui, à un facteur constant près (tout à fait arbitraire), peut être déterminée à l'aide de cette équation

$$x^m \frac{\left(1+\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)\varphi^2\left(\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)+\left(1-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)\varphi^2\left(-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)}{\varphi(\sqrt{1-ax})\,\varphi(-\sqrt{1-ax})} = \text{const.}$$

Ainsi, en prenant $m = 1$, on trouve, pour l'expression approximative de $\sqrt{x}$ entre $x = \frac{1}{a}$, $x = a$, la fraction

$$\frac{kx+1}{x+k},$$

où k est une constante dont la valeur est donnée par l'équation

$$k^4 - 6k^2 - 4\left(a+\frac{1}{a}\right)k - 3 = 0$$

et d'où, en posant

$$x = \frac{Z}{\sqrt{AB}}, \quad a = \sqrt{\frac{A}{B}},$$

on tire, pour l'expression approximative de $\sqrt{Z}$ entre $Z = A$, $Z = B$, cette formule

$$\sqrt[4]{AB}\,\frac{kZ+\sqrt{AB}}{Z+k\sqrt{AB}}.$$

Sur certaines figures minima; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 21 novembre 1884).

1. Les problèmes suivants nous sont venus à l'idée à propos de certaines questions que nous avons rencontrées dans la pratique; ils sont susceptibles de nombreuses applications.

Ils consistent en la recherche du minimum de certaines fonctions essentiellement discontinues, dont, par conséquent, les variations ne peuvent être étudiées au moyen de la théorie des dérivées. Nous les traitons par une méthode géométrique, qui exige quelques définitions et explications préliminaires, sous peine de se traduire par des phrases trop longues et trop compliquées. C'est par ces explications que nous débuterons.

I.

2. Étant donné un système de points quelconques dans un plan, on peut toujours former, et cela d'une seule manière, un polygone *convexe* ayant pour sommets certains d'entre les points du système, et renfermant tous les autres points.

Nous appellerons les points qui constituent les sommets de ce polygone les *sommets* du système ; les autres seront les *points intérieurs*.

3. Étant donnés deux points A_1 et A_2, la droite élevée perpendiculairement à A_1A_2 par le milieu de ce segment, droite que nous représenterons par ${}_{A_1}D_{A_2}$, détermine dans le plan deux régions, l'une (A_1), dans laquelle tous les points sont plus rapprochés de A_1 que de A_2, l'autre (A_2) où c'est l'inverse qui a lieu.

Prenons alors un système de points $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Les droites ${}_{A_1}D_{A_2}, {}_{A_1}D_{A_3}, \ldots, {}_{A_1}D_{A_m}$ déterminent chacune une région (A_1), et respectivement des régions $(A_2), (A_3), \ldots, (A_m)$.

Toutes ces régions (A_1) ont en commun une certaine région $r(A_1)$ limitée par un contour polygonal convexe que nous représenterons par $c(A_1)$, et dont les côtés sont des segments de certaines d'entre les droites ${}_{A_1}D_{A_2}, {}_{A_1}D_{A_3}, \ldots, {}_{A_1}D_{A_m}$. Si le point A_1 est un sommet du système, le contour $c(A_1)$ est *ouvert;* si c'est un point intérieur, $c(A_1)$ est *fermé.*

Quant aux régions $(A_2), (A_3), \ldots, (A_m)$, elles ont une partie commune si A_1 est un sommet du système, et n'en ont pas si A_1 est un point intérieur. Dans le premier cas, nous représenterons la région commune par $R(A_1)$, et le contour qui la limite par $C(A_1)$; ce contour polygonal est convexe et ouvert; ses côtés appartiennent à celles des droites ${}_{A_1}D_{A_2}, {}_{A_1}D_{A_3}, \ldots, {}_{A_1}D_{A_m}$ qui pro-

viennent de la combinaison du point A_1 avec un autre sommet du système, et même, en général, à un certain nombre seulement de celles-ci.

Ainsi, dans tous les cas, la région $R(A_1)$ comprend toute la portion du plan où les points sont plus éloignés du point A_1 que de tout autre point du système, et la région $r(A_1)$ toute la portion du plan où les points sont plus rapprochés du point A_1 que de tout autre point du système.

II.

4. Nous allons maintenant aborder le premier des problèmes que nous avons en vue, et qui est le suivant :

Trouver le cercle minimum renfermant un système de points donnés dans un plan (1).

Il est d'abord évident qu'il n'y a lieu de faire intervenir dans la solution que les sommets du système. De plus, le cercle cherché passant forcément au moins par un de ces sommets, on voit que le problème revient à déterminer, pour chacun des sommets, le cercle minimum passant par ce sommet et renfermant tous les autres, et à choisir parmi les cercles ainsi obtenus celui qui a le plus petit rayon.

Or, pour un de ces sommets pris en particulier, A_1 par exemple, le centre du cercle minimum correspondant est le point de la région $R(A_1)$ qui est le plus rapproché du point A_1. Ce point se trouve évidemment sur le contour $C(A_1)$. Mais ici deux cas peuvent se présenter.

5. Le premier cas, le moins fréquent, est celui où il existe, parmi les sommets, un point, A_2 par exemple, tel que, de tout autre sommet, le segment de droite A_1A_2 soit vu sous un angle obtus.

---

(1) On aura à résoudre ce problème dans la pratique toutes les fois qu'il s'agira de trouver un point situé à la plus grande proximité possible d'un système de points donnés, c'est-à-dire tel que la plus grande des distances rectilignes à parcourir pour aller de ce point aux divers points du système soit la plus petite possible.

Dans ce cas, les droites ${}_{A_1}D_{A_3}$, ${}_{A_1}D_{A_4}$, ... coupent toutes A_1A_2 entre le point A_1 et le milieu M de A_1A_2. Par suite, le contour $C(A_1)$ comprend un segment de la droite ${}_{A_1}D_{A_2}$, *contenant le point* M, et des segments des droites ${}_{A_1}D_{A_3}$, ${}_{A_1}D_{A_4}$, ... situés tous de l'autre côté du point A_1 par rapport à la droite ${}_{A_1}D_{A_2}$. De là ressort nettement que le point du contour $C(A_1)$, qui est le plus rapproché du point A_1, est le point M. Le cercle minimum correspondant au point A_1 est alors le cercle décrit sur A_1A_2 comme diamètre; de même pour le point A_2. Nous ajoutons que ce cercle est *absolument* le cercle minimum renfermant le système donné.

En effet, prenons un autre sommet du système, A_i par exemple. Les droites ${}_{A_i}D_{A_1}$ et ${}_{A_i}D_{A_2}$ se coupent en I. Le centre du cercle minimum correspondant au point A_i, s'il n'est pas le point I, est un point situé dans l'angle formé par les droites ${}_{A_i}D_{A_1}$, ${}_{A_i}D_{A_2}$, et opposé à l'angle qui renferme le point A_i; par suite, le rayon de ce cercle minimum est au moins égal à IA_i. Or le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle $A_iA_1A_2$; la demi-corde $\frac{A_1A_2}{2}$ de ce cercle est inférieure à son rayon IA_i; donc le rayon du cercle minimum correspondant à un sommet A_i quelconque est plus grand que le rayon $\frac{A_1A_2}{2}$ du cercle minimum correspondant aux points A_1 et A_2; et, conséquemment, c'est bien ce dernier qui est, d'une manière absolue, le cercle minimum renfermant le système proposé. Donc :

Théorème. — *Si un polygone convexe de m sommets est tel que, de m — 2 de ses sommets, on voie la diagonale qui joint les deux derniers sous des angles obtus, le cercle minimum renfermant ce polygone est celui qui est décrit sur cette diagonale comme diamètre.*

6. Passons au second cas, qui se produit le plus souvent, celui où la condition, énoncée dans le théorème ci-dessus, n'est pas remplie.

Dans ce cas, le point du contour $C(A_1)$, qui est le plus rapproché du point A_1, est un sommet de ce contour; le cercle minimum correspondant est celui qui est décrit de ce point H_1 comme centre avec H_1A_1 pour rayon. Le point H_1 étant à la rencontre de deux droites, telles que ${}_{A_1}D_{A_h}$ et ${}_{A_1}D_{A_k}$, ce cercle passe, en

outre du point A_1, par deux autres sommets A_h et A_k du système.

De même le point A_2 donne le point H_2, le point A_3 donne le point H_3,.... On voit quelle est la plus petite des longueurs A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, ...; le cercle minimum correspondant est, d'une manière absolue, le cercle minimum renfermant le système proposé.

Plusieurs de ces longueurs peuvent être égales, tout en étant plus grandes que chacune des autres; il y a alors plusieurs solutions.

7. Nous allons maintenant restreindre l'énoncé du problème en imposant au cercle *la condition d'avoir son centre sur une droite donnée* Δ.

La solution ne présente pas plus de difficulté.

Prenons un des sommets, A_1 par exemple; la droite Δ coupe le contour $c(A_1)$ en deux points p et q. Si la projection a_1 du point A_1 sur la droite Δ est située entre les points p et q, le cercle minimum correspondant est celui qui est décrit de a_1 comme centre avec a_1A_1 pour rayon, sinon il faut prendre celui des points p et q qui est le plus près du point a_1. On a de cette manière, comme précédemment, un cercle minimum correspondant à chaque sommet du système. On prend celui de ces cercles qui a le plus petit rayon.

III.

8. Le problème que nous allons traiter maintenant est le suivant :

Trouver la couronne circulaire d'épaisseur minima qui renferme un système de points donnés dans un plan (¹).

(¹) On aura à résoudre ce problème, dans la pratique, toutes les fois qu'on voudra trouver un point tel que la différence, entre la plus grande et la plus petite des distances rectilignes à parcourir pour aller de ce point à divers points donnés, soit minima. Ce point peut être considéré comme étant *le plus près d'être équidistant* des divers points donnés. Il faut remarquer que la solution du problème conduit parfois à un résultat qui n'a pas de sens dans la pratique: c'est lorsque le centre de la couronne minima est rejeté à l'infini. Mais on peut imposer à ce centre la condition d'être à l'intérieur d'une aire donnée; il n'en résulte, pour la solution, qu'une très légère modification, comme nous le ferons voir.

Il est bien évident que les cercles intérieur et extérieur qui limitent cette couronne doivent passer chacun au moins par un des points du système, et que, de plus, le cercle extérieur ne saurait passer que par des sommets de ce système.

La marche à suivre pour la solution sera donc (en supposant que le système contienne m points dont p sommets) la suivante : prendre successivement chacun des p sommets avec chacun des $m - 1$ autres points du système et déterminer chaque fois la couronne d'épaisseur minima dont le cercle extérieur passe par le sommet considéré, et le cercle intérieur par le second point (sommet ou point intérieur). On prendra ensuite, parmi toutes les couronnes ainsi déterminées, celle qui a la plus petite épaisseur.

Dès lors la solution sera complète, quand nous aurons résolu le problème suivant, qui va maintenant nous occuper :

Étant pris dans le système un sommet A_1 *et un point quelconque* A_2, *trouver la couronne circulaire d'épaisseur minima renfermant tout le système et telle que son cercle extérieur passe par* A_1, *son cercle intérieur par* A_2.

Le centre de la couronne cherchée devant évidemment se trouver à la fois dans la région $R(A_1)$ et dans la région $r(A_2)$ sera dans la partie commune à ces deux régions. Cette partie commune ρ (¹) est limitée par un contour polygonal γ, comprenant à la fois des éléments du contour $C(A_1)$ et du contour $c(A_2)$, et qui est situé tout entier du même côté que le point A_2 par rapport à la droite ${}_{A_1}D_{A_2}$.

D'ailleurs, M étant un point quelconque pris à l'intérieur de la région ρ, la droite A_1M vient couper le contour γ en un point m, et l'on a

$$A_2m > A_2M - Mm$$

et, par suite,

$$A_1m - A_2m < A_1m - A_2M + Mm$$

ou

$$A_1m - A_2m < A_1M - A_2M.$$

(¹) Si l'on veut, comme nous le disions dans la Note précédente, que le centre de la couronne minima soit situé à l'intérieur d'une aire donnée, on ne prendra que la partie de la région ρ, qui lui est commune avec cette aire.

De là cette conséquence, à savoir que le centre de la couronne cherchée est sur la portion du contour γ la plus rapprochée du point A_1, à l'intérieur de l'angle sous lequel on voit ce contour du point A_1.

Nous voilà donc amenés, en dernière analyse, à ce problème :

Trouver sur un segment de droite (dont une des extrémités peut être rejetée à l'infini), situé tout entier du même côté que le point A_2 *par rapport à la droite* ${}_{A_1}D_{A_2}$, *le point pour lequel la différence des distances aux points* A_1 *et* A_2 *est minima.*

Pour résoudre ce problème, nous allons étudier comment varie la différence des distances d'un point, mobile sur une droite, à deux points fixes donnés hors de cette droite.

9. Soient Δ la droite, A et B les points donnés. La droite Δ coupe la droite AB en un point H que nous supposerons du même côté que le point A par rapport au milieu du segment AB. Nous désignerons par H′ le conjugué harmonique du point H par rapport aux points A et B.

Considérons toutes les hyperboles qui ont pour foyers les points A et B. Parmi ces hyperboles, l'une est tangente à la droite Δ et la touche au point I. Il est facile de déterminer le point I en remarquant que, la tangente à l'hyperbole étant bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact, le point I doit se trouver sur le cercle décrit sur HH′ comme diamètre.

Si l'on diminue l'axe transverse de cette hyperbole tangente, la droite Δ la coupe en deux points; si l'on augmente cet axe transverse, l'hyperbole n'est plus coupée par Δ. De là cette conséquence, à savoir que le point I est le point de la droite Δ, dont la différence des distances aux points A et B est maxima. Remarquons que le point I est situé du même côté que le point A par rapport à la droite ${}_{A}D_{B}$, c'est-à-dire dans la région (A).

Au fur et à mesure que l'on fait diminuer l'axe transverse, on a des hyperboles qui coupent la droite Δ en deux points toujours situés dans la région (A) jusqu'à ce qu'on arrive à l'hyperbole pour laquelle la droite Δ est parallèle à l'une des asymptotes. Cette dernière coupe la droite Δ en un point J situé entre le point I et la droite ${}_{A}D_{B}$, et en un second point rejeté à l'infini. Il est facile de déterminer géométriquement le point J.

En effet, Δ étant parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole en question, la perpendiculaire BT, abaissée du foyer B sur la droite Δ, est tangente au cercle directeur qui a pour centre le foyer A; cela nous permet de tracer ce cercle directeur Γ, qui touche la perpendiculaire BT en un point où nous placerons la lettre T.

Soit B′ le symétrique, situé sur BT, du point B par rapport à la droite Δ. Le point J est le centre du cercle qui passe par les points B et B′ et est tangent au cercle Γ. Dès lors, nous aurons ce point en menant par les points B et B′ un cercle quelconque (ce qui est facile, puisque le centre de ce cercle se trouve sur la droite Δ), prenant le point d'intersection S de la corde commune à ce cercle et au cercle Γ avec la droite BB′, et menant par le point S, au cercle Γ, la tangente SU, dont U est le point de contact; la droite UA coupe la droite Δ au point J.

A partir de là, et au fur et à mesure qu'on fait décroître l'axe transverse de l'hyperbole, celle-ci coupe la droite Δ en deux points situés, de part et d'autre, de la droite ${}_AD_B$, dont ils se rapprochent tous deux indéfiniment pour venir à la limite se confondre avec le point d'intersection de Δ et de ${}_AD_B$ lorsque l'hyperbole se réduit à cette dernière droite, c'est-à-dire lorsque la différence des distances aux points A et B devient nulle.

D'après ce qui précède, la différence des distances aux points A et B a une certaine valeur pour le point situé à l'infini sur la droite Δ du même côté que A par rapport à ${}_AD_B$. Au fur et à mesure que l'on se rapproche du point I, cette différence augmente; elle est maxima au point I, puis elle diminue; au point I, elle redevient la même que pour le point situé à l'infini; puis elle continue à diminuer jusqu'au point de rencontre avec ${}_AD_B$, où elle est nulle; elle croît ensuite d'une manière continue pour reprendre à l'infini la valeur d'où nous sommes partis.

En résumé, cette différence a un minimum en I et un maximum sur ${}_AD_B$.

10. Revenons maintenant à notre problème. Nous avons un segment PQ de droite situé tout entier du même côté que A_2 par rapport à ${}_{A_1}D_{A_2}$. On voit, d'après ce qui précède, que celle des extrémités P ou Q de ce segment, pour laquelle la différence

$PA_1 - PA_2$ ou $QA_1 - QA_2$ est la plus petite, est le point du segment dont la différence des distances à A_1 et A_2 est minima.

Si le segment PQ, au besoin prolongé, coupe A_1A_2 du côté de A_2 par rapport à ${}_{A_1}D_{A_2}$, ce point de différence minima est celle des extrémités du segment qui est la plus rapprochée de ${}_{A_1}D_{A_2}$.

Si, au contraire, le segment PQ, au besoin prolongé, coupe A_1A_2 du côté de A_1 par rapport à ${}_{A_1}D_{A_2}$, et que I et J soient, pour cette droite PQ, les points qui ont été définis plus haut, trois cas peuvent se présenter :

1° L'extrémité du segment PQ la plus rapprochée de ${}_{A_1}D_{A_2}$ est située entre J et ${}_{A_1}D_{A_2}$; dans ce cas, c'est cette extrémité qui répond à la question.

2° Cette extrémité est entre I et J ; on ne peut rien dire *a priori*.

3° Cette extrémité est en deçà du point I; dans ce cas, c'est la seconde extrémité qui répond à la question.

Mais si les points I et J sont commodes pour la discussion géométrique, leur détermination est trop longue dans la pratique; il vaut mieux, à ce point de vue, lorsque PQ coupe A_1A_2 du côté de A_1 par rapport à ${}_{A_1}D_{A_2}$, comparer tout simplement les différences $PA_1 - PA_2$ et $QA_1 - QA_2$, comme cela est d'ailleurs nécessaire dans le second des trois cas qui viennent d'être énoncés.

11. On peut imposer au centre de la couronne la *condition d'avoir son centre sur une droite donnée* Δ.

Il suffira alors, dans chaque détermination partielle, par exemple dans celle qui fait correspondre la région $r(A_2)$ à la région $R(A_1)$, de prendre sur le segment de la droite Δ, compris dans la région ρ commune à $r(A_2)$ et $R(A_1)$, le point M pour lequel la différence $MA_1 - MA_2$ est minima, problème qui ne diffère pas du précédent.

D'ailleurs, la droite Δ ne coupant généralement pas toutes les régions telles que ρ, le nombre des déterminations partielles se trouvera réduit.

12. Si la droite Δ coïncide avec la droite à l'infini du plan, on a la solution de ce problème :

Trouver les deux droites parallèles les plus rapprochées qui comprennent entre elles un système de points donnés.

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tout les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

10473. Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XII. — N° 6 et dernier.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1884

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

Il est bien évident que, pour ce problème, les *points intérieurs* du système n'ont pas à intervenir dans la solution; il est donc inutile d'en tenir compte.

Mais ce dernier problème comporte une solution plus simple, que nous allons exposer brièvement :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$ les sommets du système.

Prenons un de ces sommets, A_i par exemple; par ce sommet, menons des parallèles aux $p-2$ côtés du polygone qui n'y aboutissent pas. Parmi les droites ainsi menées, un certain nombre sont complètement extérieures au polygone; considérons les côtés qui leur correspondent, et soit δ_i la distance du point A_i à celui de ces côtés qui en est le plus rapproché.

Pour A_1 nous obtenons ainsi δ_1; pour A_2, $\delta_2, \ldots$; pour A_p, δ_p. Nous voyons quelle est la plus petite des longueurs $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$; elle nous donne la solution cherchée.

Sur la construction de la tangente en un point d'origine de l'ombre portée sur lui-même par un cylindre ou un cône creux du second ordre; par M. Ernest Lebon.

(Séance du 21 novembre 1884.)

La construction qui fait l'objet de cette Note se présente dans la théorie des ombres, les rayons lumineux étant parallèles ou divergents, notamment dans l'épure du *puits militaire* ou *trou de loup*.

Pour fixer les idées, considérons un cône creux S (*fig.* 1), à base circulaire A, éclairé par des rayons parallèles, de direction L. Les génératrices SF et SG forment la séparatrice. Le cylindre d'ombre a pour directrice l'arc FAG. Les points F et G sont les *points d'origine* de l'ombre portée FHG par le cône sur lui-même; la courbe d'ombre FHG est une ellipse.

Hachette construit une tangente en un point d'origine, en remarquant qu'elle est l'intersection du plan tangent au cône en ce

point et du plan de la courbe d'ombre portée, et obtient ses projections en faisant usage d'un plan vertical auxiliaire perpendiculaire au plan de cette courbe.

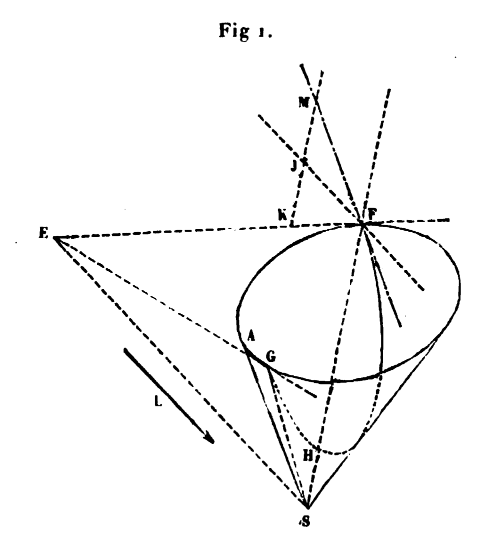
M. J. Pillet, dans le cas d'un cylindre creux de révolution, construit la projection verticale de la tangente en un point d'origine, après avoir obtenu un diamètre de l'ellipse d'ombre parallèle à cette tangente (*Théorie des Ombres et du Lavis*, 1882, p. 137).

Mais les constructions précédentes sont longues. En voici une excessivement courte, fondée sur ce théorème :

« Lorsque deux quadriques sont inscrites à une troisième, elles se coupent suivant deux courbes planes, dont les plans passent par l'intersection des plans des courbes de contact, et sont conjugués harmoniques de ces derniers. »

Le cône donné S et le cylindre d'ombre sont deux quadriques inscrites, selon les droites SF et SG d'une part, les rayons lumi-

Fig 1.



neux passant par F et G d'autre part, à la variété de quadrique formée par les deux plans tangents communs à ces quadriques aux points F et G. Le plan tangent en F coupe les plans de contact selon deux droites connues, la génératrice SF du cône et le rayon lumineux FJ; il coupe les plans des courbes d'intersection du

cône et du cylindre selon la tangente connue EF en F à la directrice FAG, et selon la tangente cherchée FM à la courbe d'ombre. Ces quatre droites forment un faisceau harmonique dont on connaît trois rayons; on a donc dans l'espace la direction de la tangente FM au point F, en menant une parallèle quelconque KJ à SF, coupant FE et FJ en K et J, et en prenant sur KJ la distance JM égale à KJ.

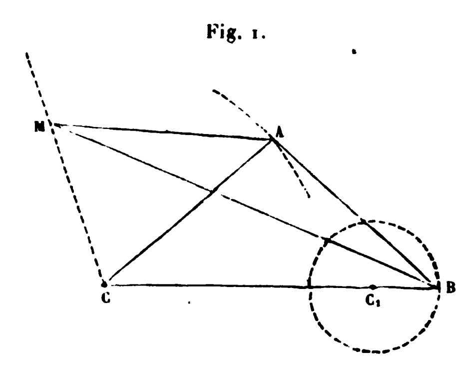
Comme les propriétés d'un faisceau harmonique sont projectives, on obtient de même aisément une projection sur un plan de la tangente en un point d'origine, car on connaît les projections sur ce plan des trois droites SF, FE, FJ.

Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvement sur certaines lignes, à l'aide de systèmes articulés; par M. Tchebicheff.

(Séance du 21 novembre 1884.)

1. Soient (*fig.* 1) ABC, ABM deux triangles isoscèles, ayant un côté commun AB, égal aux côtés AC, AM. Si l'on fait mouvoir

Fig. 1.



les sommets A, B du triangle ABM sur les cercles décrits du sommet C du triangle ABC et d'un point quelconque C_1 pris sur

son côté BC, le sommet M du triangle ABM décrit, comme il n'est pas difficile de s'en assurer, une courbe symétrique autour de l'axe passant par les points M, C. Si la ligne BC_1 n'est pas trop longue, elle peut faire un tour complet autour du centre C_1, et alors le point M décrit une courbe fermée, symétrique autour d'un axe, comme nous venons de le dire. Ceci nous présente une transformation très simple du mouvement rotatoire en mouvement sur les lignes fermées, de formes très variées et symétriques autour de certains axes. Une telle transformation du mouvement rotatoire pourra être avantageusement employée dans la pratique, si l'on trouve les conditions sous lesquelles la courbe décrite par le point M s'approche suffisamment près de celles qui donnent la solution de quelques problèmes cinématiques. C'est ce que nous allons faire maintenant pour les cas les plus simples et les plus fréquents dans la pratique : ainsi, quand on cherche à avoir le mouvement sur un cercle ou sur une ligne droite.

2. Arrêtons-nous d'abord au cas où le point M doit décrire approximativement le cercle complet, quand la ligne BC_1 tourne une fois autour du centre C_1. Nous supposerons données les longueurs $AC = AB$, BC_1 et la distance CC_1 des centres C, C_1, et nous chercherons le cercle duquel, par un choix convenable de l'angle BAM, s'approche le plus la courbe décrite par le point M. D'après l'expression de la limite des écarts que présentera cette courbe avec le cercle duquel elle s'approche le plus possible, il sera aisé de voir les conditions que doivent remplir la longueur des lignes $AC = AB$, BC_1 et la distance des centres C, C_1, pour que ces écarts soient admissibles dans la pratique.

Pour y parvenir, nous calculons d'abord les inclinaisons de la ligne AC sur CC_1 (ligne des centres C, C_1) pour deux positions qui correspondent aux moments où le point B se trouve sur la ligne CC_1 ou son prolongement.

En désignant par φ_1, φ les angles de ces inclinaisons, on les trouvera à l'aide des formules

$$\cos\varphi = \frac{CC_1 + BC_1}{2AC}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{CC_1 - BC_1}{2AC}.$$

D'après les angles φ, φ_1, on cherchera deux angles auxiliaires θ, ψ,

qui se déterminent ainsi :

$$\sin(2\theta - \varphi_1) = \frac{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}};$$

$$\cos\psi = \frac{\cos^2\theta}{\cos\varphi_1}.$$

Au moyen des angles φ, φ_1, θ, ψ, on trouve aisément tout ce qu'il est important de savoir :

1° L'angle BAM avec lequel le triangle ABM, par son sommet M, décrit la courbe la plus proche possible d'un cercle; 2° le rayon du cercle auquel s'approche le plus cette courbe; 3° la distance de son centre du point C; 4° enfin la limite des écarts de ce cercle et de la courbe décrite par le sommet M. On y parvient à l'aide des formules suivantes :

$$\text{BAM} = 2\pi - 2\theta - \varphi - \psi,$$

$$R = \frac{\sin\frac{2\theta - \varphi_1 + \psi}{2}}{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}} \text{BC}_1,$$

$$\text{OC} = \frac{\cot\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}\cos\psi}{\tang\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}\cos\frac{2\theta + \varphi - \psi}{2}} \text{BC}_1,$$

$$E = \pm\frac{\sin\frac{\psi + \varphi_1 - 2\theta}{2}\sin\frac{2\theta + \varphi + \psi}{2}}{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}\tang\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}\cos\frac{2\theta + \varphi - \psi}{2}} \text{BC}_1,$$

où R (*fig.* 2) est le rayon du cercle décrit approximativement par le sommet M, OC la distance de son centre O du point C, et E la limite des écarts de cette courbe (n° 3). D'après la valeur de E et les équations qui déterminent les angles auxiliaires θ, φ, il est clair que la courbe décrite par le sommet M s'approche très près d'un cercle toutes les fois que la différence des angles φ_1, φ est très petite. Pour appliquer les formules précédentes à ce cas particulier, qui est le plus intéressant pour la pratique, nous ferons

$$\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \varphi_0,$$

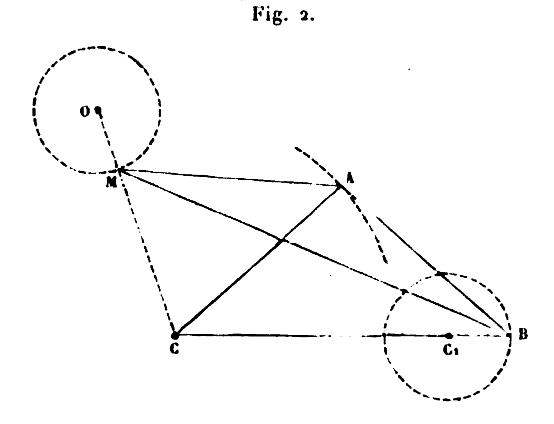
$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = \delta,$$

en supposant que δ ait une petite valeur. D'après ces égalités, on a

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \delta, \quad \varphi = \varphi_0 - \delta.$$

En portant ces valeurs de φ, φ_1 dans les formules précédentes,

Fig. 2.



nous obtenons, par le développement en série et ne tenant compte que de premiers termes avec δ,

$$\text{BAM} = 2\pi - 4\varphi_0 - \frac{3\tan^2\varphi_0 - 1}{4\tan\varphi_0}\delta^2,$$

$$R = \left(1 + \frac{3\tan^2\varphi_0 - 1}{8\tan^2\varphi_0}\delta^2\right)\text{BC}_1,$$

$$\text{OC} = \left(\frac{\cot\varphi_0}{\delta} + \frac{5 - 3\tan^2\varphi_0}{24\tan\varphi_0}\delta\right)\text{BC}_1,$$

$$E = \pm\frac{\delta}{\sin 2\varphi_0}\text{BC}_1.$$

Ces formules nous donnent, au δ^2 près,

$$\frac{E}{R} = \pm\frac{\delta}{\sin 2\varphi_0}.$$

D'un autre côté, en cherchant la différence

$$\cos\varphi - \cos\varphi_1,$$

d'après les formules qui déterminent les angles φ, φ_1, on obtient

$$\cos\varphi - \cos\varphi_1 = \frac{\text{BC}_1}{\text{AC}};$$

d'où, en substituant les valeurs de φ, φ_1, on tire, à δ^2 près,

$$\frac{BC_1}{AC} = 2 \sin \varphi \, \delta_0.$$

D'après cela, on voit que les rapports

$$\frac{E}{R}, \frac{BC_1}{AC}$$

tendent en même temps vers zéro quand la différence $\varphi_1 - \varphi = \delta$ s'approche elle-même de zéro, et comme on trouve, en divisant l'un de ces rapports par l'autre,

$$\frac{E}{R} : \frac{BC_1}{AC} = \pm \frac{1}{2 \sin 2\varphi_0 \sin \varphi_0},$$

il est clair que, pour diminuer autant que possible les valeurs du rapport

$$\frac{E}{R},$$

correspondant avec les valeurs données de

$$\frac{BC_1}{AC},$$

voisines de zéro, on doit prendre, pour φ_0, l'angle qui rend *minimum* la valeur numérique de la fonction

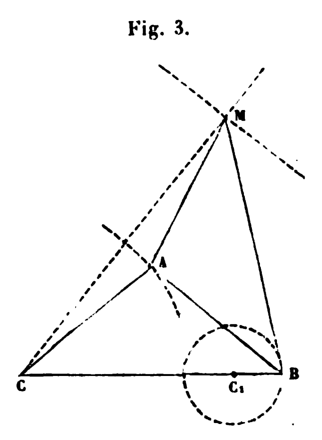
$$\sin 2\varphi_0 \sin \varphi_0.$$

Ainsi l'on parvient à un système articulé, où le mouvement circulaire du point B autour du centre C_1 se transforme en un autre mouvement du point M sur une ligne différant peu du cercle décrit du centre O. En remarquant que, dans ce système, les points M, B se meuvent autour des centres O, C_1 dans les sens opposés, on conclut que ce système donne la solution du même problème que les *manivelles antirotatives*. Dans cette transformation de rotation, on ne rencontre pas du tout de points morts, et l'on peut faire varier la loi qui lie entre elles les vitesses de deux manivelles, en transportant le centre d'oscillation de l'élément AC.

4. Passons au cas où l'on cherche à rapprocher, le plus près possible d'une ligne droite, toute la courbe fermée, décrite par le

sommet M. Nous supposerons que le triangle MAB est placé, comme on le voit, sur la *fig.* 3. Dans cette hypothèse, et en dé-

Fig. 3.



signant par t une quantité auxiliaire plus grande que O, on trouve AC = AB = BM, CC_1 et la limite des écarts E se déterminent par les formules suivantes :

$$AC = AB = AM = \frac{1+t^2}{t\sqrt{2-t^2}} BC_1,$$

$$\cos MAB = -\tfrac{1}{2}t^2,$$

$$CC_1 = \frac{1}{t\sqrt{2+t^2}} BC_1,$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2-t^2} - t(t^2+2)}{2(1+t^2)},$$

$$E = \pm \frac{t^2}{\sqrt{2-t^2}} BC_1.$$

La ligne droite que le sommet M décrira approximativement est normale à l'axe de symétrie CM, et sa distance du centre C a pour valeur

$$\left(\frac{2}{t} - \frac{t^2}{\sqrt{2-t^2}}\right) BC_1.$$

En cherchant la loi du mouvement du sommet M par rapport à l'axe de symétrie MC, on trouve que la distance de M à cet axe

s'exprime par la formule

$$\pm BC_1 \sin\alpha \sqrt{\frac{\tang^2\varphi + F(1-\cos\alpha)}{1-F(1-\cos\alpha)}} - \sqrt{\frac{2-t^2}{2+t^2}},$$

où α désigne l'angle variable que fait la ligne BC_1 pendant sa rotation avec le prolongement de la ligne des centres CC_1, et F une quantité constante égale à

$$\frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t^4})^2}.$$

Daprès cette formule, il n'est pas difficile d'assigner les limites entre lesquelles reste le point M pendant son mouvement, et qui déterminent la longueur de la ligne droite décrite approximativement.

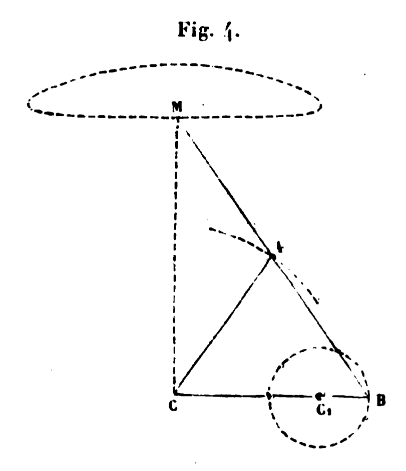
D'autre part, cette formule fait voir que les courses d'aller et de retour du point M ne correspondent pas aux mêmes angles de rotation de la ligne BC_1 autour du centre C_1, et que la différence entre ces deux angles est d'autant plus grande que la quantité t s'éloigne plus de O; par conséquent, ce système présente une transformation directe d'un mouvement rotatoire continu en mouvement rectiligne alternatif, et *vice versa,* où les courses d'aller et de retour se feront dans des temps inégaux, la vitesse de rotation étant constante. Ce système peut donc être employé comme un *mécanisme à retour rapide*. De plus, comme le point M effectue une de ses courses, presque rectiligne, dans le temps où la ligne BC_1 fait autour du centre C_1 plus d'un demi-tour, ce système peut être avantageusement employé pour faire tourner un axe à l'aide d'un pied. En appliquant de tels systèmes à deux manivelles coudées à un axe sous l'angle 180°, on obtiendra un mécanisme pour tourner l'axe avec deux pieds, qui aura l'avantage de ne pas présenter des points morts.

5. Dans le cas précédent, nous avons cherché à rapprocher, le plus près possible d'une ligne droite, toute la courbe fermée, décrite par le point M quand la ligne rotatoire de la ligne BC_1 fait un tour complet autour du centre C_1. Nous allons nous occuper maintenant du cas où l'on cherche ce rapprochement pour une

partie de cette courbe correspondant à un demi-tour de la ligne BC_1 autour du centre C_1, savoir : depuis $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\alpha = +\frac{\pi}{2}$.

Nous nous bornerons au cas le plus simple, où le triangle MAB se réduit à une ligne droite MAB (*fig.* 4), ce qui revient à donner

Fig. 4.



à l'angle MAB une valeur égale à 180°. Dans ce cas, les lignes $AC = AB = AM$, CC_1 et la limite des écarts E se déterminent par les formules suivantes :

$$AC = AB = AM = \frac{5+\sqrt{7}}{2} BC_1,$$

$$CC_1 = \frac{4+\sqrt{7}}{3} BB_1,$$

$$E = \pm \frac{\sqrt{272+104\sqrt{7}} - \sqrt{305+92\sqrt{7}}}{12} BC_1.$$

D'après l'équation de la courbe que décrit le point M dans ce système, on reconnaît aisément que la partie qui correspond à la rotation de la ligne BC_1 d'un quart de tour en haut et en bas de sa position primitive est presque rectiligne. Après avoir parcouru cette partie de sa trajectoire, le point M se lève et fait sa marche de retour, en montant peu à peu jusqu'au milieu de sa course et en s'abaissant suivant la même loi, après avoir dépassé ce milieu. Un tel mouvement du point M, dans lequel se transforme directement le mouvement rotatoire de la ligne BC_1, dans notre sys-

tème, peut avoir des applications utiles. Si l'on applique de tels systèmes à deux manivelles coudées à un axe sous l'angle 180°, on obtient un mécanisme où la rotation d'un axe se transforme en mouvement de deux points qui, tour à tour, parcourent la même ligne presque droite, et dont chacun se lève au-dessus de cette ligne après l'avoir parcouru quand l'autre s'abaisse sur elle pour la parcourir à son tour. En ne considérant que l'espace où se trouve la partie presque rectiligne de la trajectoire de ces points, on reconnaît aisément qu'ils produisent approximativement le même effet que les points équidistants de la circonférence d'une roue tournante quand son rayon est infiniment grand. Donc, sous ce rapport, le système dont nous venons de parler peut bien jouer le rôle d'une roue infiniment grande.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XII.

FIN DE LA TABLE DU TOME XII.

ERRATA.

Page 172, ligne 8, *au lieu de* petites, *lisez* grandes.

175, ligne 6, en remontant, *intervertir les mots* maximum *et* minimum.

176, ligne 4, *au lieu de* A_2, *lisez* A_1.

176, ligne 7, *au lieu de* A_1, *lisez* A_2.

176, ligne 19, *au lieu de* A_1, *lisez* A_2.

TABLES.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

(Tomes I à X.)

Arithmétique et théorie des nombres.

Géométrie de l'échiquier ou des quinconces.

Algèbre.

Analyse.

Calcul des probabilités.

Géométrie.

Courbes planes.

Courbes gauches.

Surfaces.

Géométrie généralisée.

Géométrie descriptive.

Géométrie cinématique.

Cinématique.

Statique.

Dynamique.

Mécanique appliquée.

Physique mathématique.

Histoire des Mathématiques.

Divers.

TABLE PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

DE NOMS D'AUTEURS.

Darboux. — Sur les propriétés métriques des surfaces du second degré (II, 144). — Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution (V, 100). — Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité (VII, 7).

Flye Sainte-Marie. — Sur quelques propriétés des courbes gauches fermées (I, 82). — Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier (V, 144).

Fouret. — Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques (I, 132). — Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface (I, 258). — Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes algébriques ou transcendantes, définies par deux caractéristiques (II, 72). — Sur les courbes planes transcendantes, susceptibles de faire partie d'un système (μ, ν) (II, 96). — Détermination du nombre exact des solutions d'un système de n équations algébriques à n inconnues (II, 127). — Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré (III, 93). — Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique (V, 19). — Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés (V, 130). — Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et à une surface (VI, 43). — Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν, ayant un point principal multiple d'ordre ν (III, 177).

Gascheau. — Étude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel (X, 207).

Genty. — Étude sur les courbes gauches unicursales (IX, 115).

Goursat. — Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce (X, 44).

Gunther. — Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques (X, 88).

Haag. — Théorème sur les surfaces (V, 166). — Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit (VII, 140). — Note sur une classe d'équations différentielles (VIII, 80).

Halphen. — Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre (I, 19). — Sur le mouvement d'une droite (I, 114). — Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre (I, 130 et 226; II, 11). — Sur un problème de probabilités (I, 221). — Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites (I, 253). — Recherches de Géométrie à n dimensions (II, 34). — Sur le développement d'un solide invariable (II, 56). — Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques (II, 69). — Sur un point de la théorie du contact (II, 94). — Sur le contact des surfaces (III, 28). — Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier (III, 76). — Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes (IV, 29). — Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré (IV, 59). — Théorèmes concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation (IV, 94). — Sur les correspondances entre les points de deux courbes (V, 7). — Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes (V, 134). — Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers (V, 158). — Sur une proposition

d'Algèbre (V, 160). — Sur des suites de fractions analogues à la suite de Farey (V, 170). — Sur les singularités des courbes gauches algébriques (VI, 10). — Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers et les décompositions en deux carrés (VI, 119). — Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers (VI, 173). — Sur l'équation différentielle des coniques (VII, 83). — Sur le développement d'une fonction intermédiaire (VII, 92). — Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide (VIII, 18). — Observations sur la théorie des caractéristiques (VIII, 31). — Sur une formule d'analyse (VIII, 62). — Problème concernant les courbes planes du troisième degré (IX, 96). — Sur une série d'Abel (X, 67). — Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles (X, 162).

Haton de la Goupillière. — Note sur la théorie des développoïdes (V, 126).

Hermary. — Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive élémentaire (VII, 138).

Hermite. — Sur l'indice des fractions rationnelles (VII, 128).

Holst (Elling). — Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques (VIII, 52).

Humbert. — Sur l'équation hypergéométrique (VIII, 112). — Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme (VIII, 124). — Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions (VIII, 182). — Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques (VIII, 191; IX, 24). — Sur une formule de M. Hermite (IX, 42). — Sur la fonction $(x-1)^a$ (IX, 56). — Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre (IX, 166).

Hugo (comte L.) — Sur un dodécaèdre antique conservé au Musée du Louvre (I, 33).

Jordan (Camille). — Sur la limite de transitivité des groupes non alternés (I, 40). — Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace (I, 144). — Mémoire sur les groupes primitifs (I, 175). — Questions de probabilités (I, 256 et 281). — Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires (II, 100). — Essai sur la Géométrie à *n* dimensions (III, 103). — Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires (V, 174). — Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples (IX, 113).

Jung. — Construction de la chaînette par points, et division d'un arc de cette courbe en *n* parties proportionnelles à des segments donnés (IV, 114). — Sur la construction de la troisième courbe représentative des poussées maxima et minima dans le Mémoire de M. Peaucellier *Sur la stabilité des voûtes* (IV, 163). — Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité (VII, 132).

Kantor (S.). — Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à *r* dimensions (VIII, 208).

Kœhler. — Sur la construction des courbes du cinquième et du sixième ordre à points multiples (I, 27). — Sur les réseaux de courbes planes (I, 124).

Laguerre. — Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner (I, 21). — Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre (I, 31). — Sur les cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace (I, 71). — Sur quelques théorèmes d'Arithmétique (I, 77). — Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe (I, 101). — Mémoire sur la géométrie de la sphère (I, 241). — Sur un genre particulier de surfaces dont on peut

Remarque sur le frottement d'une corde sur un cylindre lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse (IX, 46).

Lemoine (Émile). — Sur une question de probabilités (I, 39).

Lemonnier. — Mémoire sur la transformation des formes quadratiques (III, 48). — Sur des fonctions analogues à celles de Sturm (VI, 149). — Sur la résolution de trois équations du second degré en x, y, z (VII, 16). — Calcul d'un déterminant (VII, 175). — Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes (X, 223).

Le Paige. — Note sur les déterminants bordés (VIII, 128). — Sur la règle de multiplication des déterminants (IX, 67).

Liguine. — Sur le lieu des points d'un système invariable, mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes (I, 152). — Note historique sur le problème des engrenages cylindriques (I, 251).

Lindemann. — Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires (V, 113, et VI, 195). — Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini, qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre (X, 21).

Lucas (Édouard). — Formules fondamentales de géométrie tricirculaire et tétrasphérique (V, 136). — Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens (V, 178). — Théorème sur la géométrie des quinconces (VI, 9). — Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier (VI, 49). — Sur les développements en séries (VI, 57). — Sur les suites de Farey (VI, 118). — Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli (VIII, 169). — Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées (VIII, 173). — Sur l'extension du théorème de Descartes (VIII, 187).

Mannheim. — Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace (I, 106). — Construire la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données (II, 140). — Nouvelles propriétés de quelques courbes (IV, 158). — Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre (V, 163). — Sur le paraboloïde des normales d'une surface réglée (V, 190). — Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre, et nouvelle application de ce théorème (VI, 5). — Démonstrations géométriques d'un théorème relatif aux surfaces réglées (VI, 7).

Mathieu (Émile). — Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la Mécanique analytique (I, 157).

Pellet. — Sur les résidus cubiques et biquadratiques, suivant un module premier (X, 157).

Perott. — Sur un théorème de Gauss (X, 87). — Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières (X, 250).

Perrin. — Note sur la division mécanique de l'angle (IV, 85). — Note sur une formule de sommation applicable à une classe de séries (V, 47). — Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques planes (VI, 84). — Sur le problème des aspects (X, 103). — Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs (X, 139).

Picard. — Sur une classe de fonctions non uniformes (VII, 102).

Picquet. — Sur les courbes gauches algébriques; surface engendrée par les

Tchebychef. — Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions (III, 103). — Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point (VII, 188).

Turquan. — Sur l'intégration de quelques équations différentielles (III, 40).

Weill. — Énoncé d'un théorème d'Arithmétique (IX, 172). — Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier (X, 55). — Sur les polygônes dont les côtés sont tangents à une courbe et dont tous les sommets sont sur la courbe (X, 127). — Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale (X, 137).

Weyr (Émile). — Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate (I, 18).

Worms de Romilly. — Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires (VIII, 64).

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

9398 Paris. - Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tout les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

10473. Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XIII. — N° 1.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1885

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par se travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 20 DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. PICQUET,		Secrétaires de la Société.
WEILL,		
COLLIGNON,		Membres du Conseil.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE,		
JORDAN,		
MANNHEIM.		

10631 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TREIZIÈME. — ANNÉE 1884-85.



PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

—

1885

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU MOIS DE JANVIER 1885 (1).

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président	M. APPELL.
Vice-Présidents	M. COLLIGNON. M. FOURET. M. LUCAS. M. PICQUET.
Secrétaires	M. POINCARÉ. M. WEILL.
Vice-Secrétaires	M. HUMBERT. M. OCAGNE (D').
Archiviste	M. SIMART.
Trésorier	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	M. ANDRÉ. M. PICARD. M. CLAYEUX. M. COMBEROUSSE (DE). M. DARBOUX. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. LAISANT. M. MANNHEIM. M. ROUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents	M. CREMONA. M. GENTY. M. MATHIEU. M. TCHÉBICHEFF.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

ACHARD, directeur-adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de Chabrol, 40, à Paris.
AMIGUES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille.
ANDRE (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 25, à Paris.
AOUST (l'abbé), professeur à la Faculté des sciences, rue Espérandieu, 19, à Marseille.
APPELL, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Soufflot, 22, à Paris.
ARNAUD, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, 5, rue Corneille.
ARON (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.
ASTOR, chargé de cours à la Faculté des Sciences, boulevard de Bonne, à Grenoble.
AUBERT, élève-ingénieur des Mines, rue de Grenelle, 96, à Paris.
AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Lyon.
BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P.
BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
BÈRE, ingénieur des manufactures de l'État, à Lille.
BERTRAND (Joseph), secrét. perp. de l'Académie des Sciences, rue de Seine, 6, à Paris.
BISCHOFFSHEIM, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
BIENAYMÉ (Arthur), ingénieur de la Marine, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé), S. P.
BONCOMPAGNI (le prince Balthasar), place Colonna, palais Piombino, à Rome.
BONNET (Ossian), membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 14, à Paris.
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
BOUCHER, ancien directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue du Pin, 9, à Angers.
BOULANGER, professeur de Mathématiques, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
BRAULT (A.), négociant à Pons (Charente-Inférieure).
BRÉMARD, architecte, boulevard Malesherbes, 16, à Paris.
BRÉSARD, professeur au lycée Fontanes, rue Vézelay, 3, à Paris.
BRIOSCHI, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
BRISSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Becon, 55, à Courbevoie (Seine).
BROCARD, capitaine à l'École régimentaire du Génie de Montpellier, S. P.
CARON, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
CASEY (John), professeur à l'Université catholique de Dublin, Stephens Green, 84.
CATALAN, professeur à l'Université, à Liège (Belgique).
CHASLES, membre de l'Institut (décédé), S. P.
CHEMIN, ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Rennes, 73, à Paris.
CIVIALE, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
CLAYEUX, intendant divisionnaire, avenue de Clichy, 52, à Paris.
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
COLLET, professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
COMBEROUSSE (DE), professeur à l'École Centrale, rue Blanche, 45, à Paris.
COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 68, à Paris.
CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, Baltimore (Maryland).
CREMONA, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.
CRETIN, professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 107, à Paris.
DARBOUX, professeur à la Faculté des Sciences, membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
DAVID, lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, place de l'École d'Artillerie, 42, à Toulouse.
DEFFORGES, capitaine d'infanterie, attaché à l'État-major du Ministre de la Guerre, rue de Grenelle Saint-Germain, 123, à Paris.
DELANNOY, sous-intendant militaire, à Orléans.
DERUYTS, docteur ès sciences, hôtel du Sénat, rue de Tournon, 7, à Paris.

DEWULF, lieutenant-colonel, chef du Génie, à Montpellier.
DOSTOR, docteur ès sciences, rue de Rennes, 121, à Paris.
DREYFUS (Ferdinand), publiciste, rue de l'Université, 25, à Paris.
DURRANDE, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
ESCARY, professeur au Prytanée militaire, à la Flèche (Sarthe).
FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
FLEUREAU, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Flandre, 81, à Paris.
FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jeanne-d'Arc, 9, à Nancy.
FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
FONTÈS, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Mont-de-Marsan.
FOURET, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
GARIEL, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Jouffroy, 39, à Paris-Batignolles.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
GENOCCHI, professeur à l'Université, rue du Pô, 38. à Turin (Italie).
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
GERONO, rue Hallé, 40 et 42, à Paris.
GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, quai d'Orsay, 63, à Paris.
GOFFART, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, rue Riguepels, 22, à Toulouse.
GRAINDORGE, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
GRUEY, directeur de l'Observatoire, à Besançon.
GUCCIA (Jean), vià Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
GUÉLOT, lieutenant-colonel au 118e régiment d'infanterie, à .
GUNTHER (Dr Sigismond), député au Reichstag allemand, à Ansbach (Bavière).
HAAG, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
HABICH, directeur de l'École des Mines, à Lima (Pérou).
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gounod, 8, à Paris, S. P.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Mines, avenue du Trocadéro, 9, à Paris, S. P.
HATT, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
HENRIOT, ingénieur des Mines, à Charleville (Ardennes).
HENRY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
HENRY (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Berthollet, 22, à Paris.
HERMARY, chef d'escadrons au 17e régiment d'Artillerie, à Douai (Nord).
HERMITE, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
HILAIRE, professeur de Mathématiques, rue d'Arras, 4, à Douai (Nord).
HIRST, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
HOLST (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
HOUBIGANT, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
HUGONIOT, capitaine d'Artillerie de la Marine, rue de l'Arsenal, 11, à Paris.
HUMBERT, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
HUYOT, ingénieur des Mines, rue du Cirque, 10, à Paris.
IMBER, répétiteur à l'École Centrale, boulevard Beaumarchais, 109, à Paris.
JACQUIER, ingénieur des Ponts et Chaussées, directeur des Travaux publics à Saint-Denis (Réunion).
JANIN, capitaine au 32e régiment d'Artillerie, à Orléans.
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 28, à Paris.
JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varennes, 48, à Paris, S. P.
JOUFFRET, chef d'escadrons d'Artillerie, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, à Milan (Italie).
KANTOR (S.), privat-docent à l'École polytechnique allemande, à Prague.
KŒNIGS, professeur à la Faculté des Sciences, à Besançon.

KOSTENEC (Antoine), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
KOVALEWSKY (Mme DE), professeur à l'Université de Stockholm (Suède).
KRONECKER (Dr Léopold), professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin.
LACOR, chargé de cours à la Faculté libre des Sciences, rue des Pyramides, 4, à Lille.
LAFFON DE LADEBAT, amiral (décédé), S. P.
LAGUERRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 61, à Paris.
LAISANT, député, avenue Victor Hugo, 84 *bis*, à Paris.
LAQUIÈRE, administrateur attaché au service central des Affaires indigènes, à Alger.
LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
LAVEISSIÈRE, élève externe à l'École des Mines, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
LÉAUTÉ, directeur des études à l'école Monge, 141, boulevard Malesherbes, à Paris.
LEBON (Ernest), professeur au lycée Charlemagne, rue des Ecoles, 4 bis, à Paris
LECORNU, ingénieur des Mines, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Caen (Calvados).
LEFÉVRE, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, à Bar-le-Duc.
LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
LE PONT, rue du Bouloi, 11, à Paris.
LESAGE, professeur au lycée Charlemagne, rue d'Arras, 6, à Paris.
LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
LÉVY (Léon), ingénieur des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
LÉVY (Lucien), professeur au lycée Louis-le-Grand, boulevard d'Enfer, 142, à Paris.
LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, boul. Saint-Germain, 258, à Paris.
LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
LIE (Sophus), professeur à l'Université de Christiania.
LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Kœnigsberg (Allemagne).
LONGCHAMPS (GOHIERRE DE), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne, rue de l'Estrapade, 15, à Paris.
LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du faubourg Saint-Honoré, 186. à Paris.
LUCAS, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Bellay, 4, à Paris.
MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue de l'Odéon, 21, à Paris.
MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 117, à Paris.
MALLOIZEL, rue de l'Estrapade, 11, à Paris.
MALMSTÉN, conseiller d'État, à Upsal (Suède).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
MARCHAND, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Poissy, 13.
MARSILLY (le général DE), rue Chante-Pinot, à Auxerre.
MARTIN (Artemas), maître ès-arts, docteur en Philosophie, à Erié (Pensylvanie).
MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jean, 22, à Nancy.
MERCEREAU, licencié ès-sciences, rue Gay-Lussac, 38.
MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
MOUTARD, examinateur à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
OCAGNE (D'), élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Lille, 1, à Paris.
OHRTMANN (Dr Carl), rédacteur du *Jahrbuch*, Markgrafenstrasse, 78. à Berlin.
OVIDIO (Enrico D'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin.
PANEK (Auguste), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
PARAF, agrégé des Sciences Mathématiques à l'École Normale supérieure.
PARMENTIER (le général), membre du Comité des fortifications, rue du Cirque, 5, à Paris.
PARRAN, ingénieur des Mines, avenue de l'Opéra, 26, à Paris.
PATURET, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Jacob, 44, à Paris.

PAUTONNIER (l'abbé), professeur au collège Stanislas.
PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
PELLETREAU, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
PERCIN, chef d'escadrons d'Artillerie, à l'École spéciale militaire, à Saint-Cyr.
PERRIN, ingénieur des Mines, rue de l'Étoile, 17, au Mans.
PEROTT (Joseph), à Port-Navalo, par Arzon (Morbihan), S. P.
PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
PICARD (Émile), professeur suppléant à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
PICQUET, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
PISTOYE (DE), capitaine d'Artillerie, rue Montbaurin, 20, à Versailles.
POINCARÉ, ingénieur des Mines, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 66, à Paris,
POKORNY (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
POLIGNAC (prince C. DE), rue Miroménil, 44, à Paris, S. P.
POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers.
PRICE (Bartholoméo), professeur à l'Université, à Oxford (Angleterre).
PUCCIARELLI, répétiteur au lycée Saint-Louis.
PUTZ (le général), commandant l'École d'application de l'Artillerie et du Génie, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
RAFFY, agrégé-préparateur à l'École Normale supérieure, rue Denfert-Rochereau, 16, à Paris, S. P.
RANCY (DE), directeur général de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, rue de Châteaudun, 44, à Paris.
REINACH (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
REY (Casimir), professeur à l'École régimentaire du Génie, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
RIBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Aix (Bouches-du-Rhône).
RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon.
RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, rue de Rennes, 66, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
ROUCHÉ (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, boulevard Pereire, 124, à Paris.
ROUX, architecte, rue de l'Arcade, 25, à Paris.
SAINT-PAUL (DUCUP DE), capitaine au 36e régiment d'Artillerie, à Clermont-Ferrand.
SARRAU, prof. à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
SCHLEGEL (Dr Victor), à Waren (Allemagne).
SCHOUTE, professeur à Groningue (Hollande).
SCHUBERT, professeur, Steindam, 89, à Hambourg (Allemagne).
SÉGUY, rue Pascal, 2, à Paris.
SÉLIVANOFF, attaché à l'Université, à Saint-Pétersbourg.
SIMART, lieutenant de vaisseau, examinateur d'admission à l'École navale, rue de Miroménil, 70, à Paris.
SIMONNET, chef d'escadron d'artillerie, à Versailles.
SONINE (Nicolas), professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, rue Forgowaja, 49, à Odessa (Russie).
STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université d'Athènes.
STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
SYLOW, professeur à l'Université, Frederikshald (Norwège, S. V.).
TANNERY (Paul), ingénieur du service de l'expertise à la Manufacture des Tabacs, à Paris, S. P.

TANNERY, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
TARRY (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Pétersbourg.
TERRIER, professeur de Mathématiques, rue Monsieur-le-Prince, 18, à Paris.
TISSOT, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
TRASBOT, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Bernoulli, 7.
TRESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Saumur (Maine-et-Loire).
VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
VANDAME, lieutenant d'artillerie, démissionnaire, rue de la Vignolie, 18, Lille.
VAŇEČEK (J.-S.), professeur au lycée, à Jičín (Bohême).
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 26, à Paris.
VICAIRE, ingénieur des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
VIELLARD, manufacturier, aux forges de Morvillars (territoire de Belfort).
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée, à Alger.
WALCKENAER, ingénieur des Mines, à Pau (Basses-Pyrénées).
WEILL, professeur de Mathématiques, rue de la Station, 8 bis, au Vésinet (Seine-et-Oise).
WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Maria-Theresa-Strasse, 10, à Obermeidling, près Vienne (Autriche).
WILSON, député, au palais de l'Élysée, à Paris.
WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des Mines, rue de Balzac, 7, à Paris.
ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Pétersbourg.
ZELLER (Charles), recteur du séminaire, à Markgrœningen (Wurtemberg).
ZEUTHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BISCHOFFSHEIM, banquier.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, capitaine du Génie.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur.
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
PEROTT (Joseph).
POLIGNAC (prince C. DE).
SYLOW, professeur à l'Université, Frederikshald.
TANNERY (Paul), ingénieur des manufactures de l'État.

Modifications survenues depuis le 1er janvier 1884.

DÉMISSIONNAIRES.

PRESLES (DE), sous-intendant militaire.

NOUVEAUX MEMBRES.

ARNAUD, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées.
CASEY (John), professeur à l'Université catholique de Dublin.
CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore.
HENRIOT, ingénieur des Mines.
LIE (Sophus), professeur à l'Université de Christiania.
MARCHAND, ancien élève de l'École Polytechnique.
MERCEREAU, licencié ès-sciences.
MARTIN (Artémas), docteur en Philosophie, à Erié-Pensylvanie.
PARAF, agrégé de l'Université.
PAUTONNIER (l'abbé), professeur au Collège Stanislas.
PUCCIARELLI, répétiteur au lycée Saint-Louis.
SIMONNET, chef d'escadron d'artillerie.
TRASBOT, ancien élève de l'École Polytechnique.
VANDAME, à Lille.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
Académie des Sciences de Berlin.
Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
Académie des Arts et des Sciences du Connecticut (Etats-Unis d'Amérique).
Académie des Sciences de Munich.
Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.
Académie des Sciences de Paris.
Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.
Académie des Sciences de Prague.
Académie Royale des *Lincei*, à Rome.
Académie Impériale des Sciences de Vienne.
Acta Mathematica (rédacteur M. Mittag-Leffler, à Stockholm).
American Journal of Mathematics, publié par l'Université de John Hopkins, à Baltimore (rédacteur M. Thomas Craig, à Baltimore).
Annali di Matematica (rédacteur M. Brioschi, à Milan).
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (rédacteurs MM. S. Lie et W. Muller, à Christiania).
Archiv für Mathematik und Physik (rédacteur D[r] Hoppe, Lindestrasse, 89, à Berlin, S. W.
Zeitschrift für Mathematik und Physik (rédacteur D[r] Oscar Schlömilch, à Dresde).
Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.
Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques (rédacteur M. Darboux).
Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky (rédacteur M. Eduard Weyr, à Prague).
École Royale Normale supérieure de Pise.
Giornale di Matematiche (rédacteur M. Battaglini, à Rome).
Institut Royal de Luxembourg.
Institut Royal lombard des Sciences et Lettres, à Milan.
Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts, à Venise.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (rédacteur M. Carl Ohrtmann, à Berlin).
Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas (rédacteur M. Gomes Teixeira, à Coïmbre).
Journal de l'École Polytechnique.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, à Berlin.
Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Leipzig).
Mathesis (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).
Meteorologische Zeitschrift.
Réunion des officiers, à Lille.
Société mathématique d'Amsterdam.
Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.
Société philosophique de Cambridge.
Société Royale d'Édimbourg.
Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.
Société Royale des Sciences de Goettingue.
Société mathématique de Hambourg.
Société hollandaise des Sciences, à Harlem (Hollande).
Société mathématique de Kharkoff (Russie).
Société astronomique de Londres.
Société mathématique de Londres.
Société Royale de Londres.
Société mathématique de Moscou.
Société mathématique d'Odessa (Russie).
Société philomathique de Paris.
Société mathématique de Prague.
Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.
Société Royale des Sciences d'Upsal (Suède).
Société des Sciences naturelles de Zurich.
Université Royale de Pise.
Tidsskrift for Mathematik (rédacteur M. Zeuthen, à Copenhague).
Tijdschrift voor Vormleer, rekenkunde en de beginselen der Viskunde (rédacteur M. Versluys, à Amsterdam).

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques; par M. P. Appell.

(Séance du 6 décembre 1884.)

D'après les notations de Jacobi, on a

$$\Theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{nx} q^{n^2},$$

$$\Theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{nx} q^{n^2};$$

ces deux fonctions étant impaires, on a, en posant

$$(1) \qquad \frac{\Theta_1\left(\dfrac{Kx}{\pi i}\right)}{\Theta\left(\dfrac{Kx}{\pi i}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{nx},$$

$$(2) \qquad A_{-n} = A_n.$$

Voici comment on peut déterminer les coefficients A_n. En

chassant le dénominateur, on déduit de l'équation (1) la suivante :

$$(3) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{nx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{nx} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{nx}.$$

Si l'on effectue le produit de deux séries du second membre, on doit obtenir une série identique au premier membre. En égalant les coefficients de e^{nx}, on obtient ainsi l'équation

$$q^{n^2} = \Sigma (-1)^{\nu} q^{\nu^2} A_{\mu},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de μ et ν dont la somme est n

$$\mu + \nu = n;$$

faisant donc

$$\nu = n - \mu,$$

on a

$$q^{n^2} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (-1)^{n-\mu} q^{n^2-2\mu n+\mu^2} A_{\mu};$$

d'où, en simplifiant,

$$(4) \qquad (-1)^n = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (-1)^{\mu} q^{\mu^2-2\mu n} A_{\mu};$$

en vertu de la relation (2), cette équation peut s'écrire

$$(5) \qquad (-1)^n = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=+\infty} (-1)^{\mu} q^{\mu^2} A_{\mu} (q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}).$$

En faisant successivement

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

on a ainsi une suite infinie d'équations que doivent vérifier les coefficients

$$A_0, A_1, A_2, \ldots.$$

On en tirera ces coefficients comme il suit.

Considérons les équations du premier degré, déduites de l'équation

$$(6) \qquad (-1)^n = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^{\mu} q^{\mu^2} A_{\mu} (q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}),$$

en y faisant successivement

$$n = 0, 1, 2, \ldots, m;$$

ces équations pourront s'écrire

$$(6') \qquad (-1)^n = A_0 + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu \cos n\mu\omega,$$

en posant, pour abréger,

$$\omega = \frac{2\pi K' i}{K};$$

et, si l'on veut les écrire en détail, on aura le système

$$(7)\left\{\begin{array}{l} 1 = A_0 - 2qA_1 + 2q^4A_2 + \ldots + 2(-1)^m q^{m^2} A_m, \\ -1 = A_0 - 2qA_1\cos\omega + 2q^4A_2\cos 2\omega + \ldots + 2(-1)^m q^{m^2} A_m \cos m\omega, \\ 1 = A_0 - 2qA_1\cos 2\omega + 2q^4A_2\cos 4\omega + \ldots + 2(-1)^m q^{m^2} A_m \cos 2m\omega, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^m = A_0 - 2qA_1\cos m\omega + 2q^4A_2\cos 2m\omega + \ldots + 2(-1)^m q^{m^2} A_m \cos m^2\omega. \end{array}\right.$$

Il est facile de tirer de ces équations l'expression d'un des coefficients A_μ ou plutôt $2(-1)^\mu A_\mu q^{\mu^2}$, μ étant supposé moindre que m.

Pour cela, je remarque que le système plus général

$$(8)\left\{\begin{array}{l} 1 = A + B + \ldots + L, \\ \cos\lambda = A\cos 2a + B\cos b + \ldots + L\cos l, \\ \cos 2\lambda = A\cos 2a + B\cos 2b + \ldots + L\cos 2l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \cos m\lambda = A\cos ma + B\cos mb + \ldots + L\cos ml, \end{array}\right.$$

où le nombre des lettres $a, b, \ldots, l$ est égal au nombre $(m+1)$ des équations, se résout de la façon suivante. Le déterminant des coefficients des inconnues A, B, ..., L est

$$\Delta(a, b, \ldots, l) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cos a & \cos b & \ldots & \cos l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos ma & \cos mb & \ldots & \cos ml \end{vmatrix},$$

et l'on reconnaît immédiatement (¹) que ce déterminant peut s'écrire

$$\Delta(a, b, \ldots, l) = P.\Pi(\cos a - \cos b),$$

(¹) Ce déterminant, avec d'autres plus généraux, a été développé par M. Fouret (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2 décembre 1884).

où P est une constante numérique et où le produit Π est étendu à toutes les différences des quantités

$$\cos a,\ \cos b,\ \ldots,\ \cos l,$$

prises deux à deux.

D'après cela, la valeur de A, tirée des équations (8), est

$$A = \frac{\Delta(\lambda, b, c, \ldots, l)}{\Delta(a, b, c, \ldots, l)},$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad A = \frac{(\cos\lambda - \cos b)(\cos\lambda - \cos c)\ldots(\cos\lambda - \cos l)}{(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c)\ldots(\cos a - \cos l)};$$

en faisant une permutation de lettres, on déduira de là les valeurs de B, C, ..., L.

Remarquons maintenant que les équations (8) se réduisent à (7), si l'on fait, dans (8),

$$A = A_0,\quad B = -2A_1 q,\quad C = 2A_2 q^4,\quad \ldots,\quad L = (-1)^m A_m q^{m^2},$$
$$\lambda = \pi,\quad a = 0,\quad b = \omega,\quad c = 2\omega,\quad \ldots,\quad l = m\omega.$$

On aura donc le coefficient A_0, en faisant ces substitutions dans la formule (9), ce qui donne

$$(10) \qquad A_0 = \frac{(1+\cos\omega)(1+\cos 2\omega)\ldots(1+\cos m\omega)}{(-1+\cos\omega)(-1+\cos 2\omega)\ldots(-1+\cos m\omega)},$$

puis faisant croître m indéfiniment. D'une façon générale, on aura le coefficient

$$(-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu,$$

en faisant, dans (9),

$$\lambda = \pi,\quad a = \mu\omega,$$

$b, c, \ldots, l$ ayant les valeurs

$$0,\ \omega,\ 2\omega,\ \ldots,\ (\mu-1)\omega,\ (\mu+1)\omega,\ \ldots,\ m\omega.$$

On a ainsi

$$2(-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu$$
$$= \frac{2(1+\cos\omega)(1+\cos 2\omega)\ldots[1+\cos(\mu-1)\omega][1+\cos(\mu+1)\omega]\ldots(1+\cos m\omega)}{(1-\cos\mu\omega)(\cos\omega-\cos\mu\omega)\ldots[\cos(\mu-1)\omega-\cos\mu\omega][\cos(\mu+1)\omega-\cos\mu\omega]\ldots(\cos m\omega-\cos\mu\omega)}.$$

Changeons les signes des μ premiers facteurs du dénominateur, ce qui revient à multiplier les deux membres par $(-1)^\mu$, on peut

écrire

$$(11)\quad q^{\mu^2}A_\mu = \frac{1}{(\cos\mu\omega - 1)} \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\mu\omega - \cos\nu\omega} \prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\nu\omega - \cos\mu\omega}.$$

Ces deux produits qui figurent dans cette expression se transforment ainsi qu'il suit. On a identiquement

$$\begin{aligned}\frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\mu\omega - \cos\nu\omega} &= \frac{q^{2\nu} + q^{-2\nu} + 2}{q^{2\mu} + q^{-2\mu} - q^{2\nu} - q^{-2\nu}} \\ &= q^{2\mu-2\nu} \frac{(1 + q^{2\nu})^2}{(1 - q^{2\mu+2\nu})(1 - q^{2\mu-2\nu})};\end{aligned}$$

d'après cela, on a

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\mu\omega - \cos\nu\omega} = q^{\mu(\mu-1)} \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{(1 + q^{2\nu})^2}{(1 - q^{2\mu+2\nu})(1 - q^{2\mu-2\nu})};$$

et, si l'on remarque que ν, variant de 1 à $\mu - 1$, la différence $\mu - \nu$ varie également de 1 à $\mu - 1$, et la somme $\mu + \nu$ de $\mu + 1$ à $2\mu - 1$, on peut écrire

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\mu\omega - \cos\nu\omega} = q^{\mu(\mu-1)}(1 - q^{2\mu}) \frac{\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} (1 + q^{2\nu})^2}{\prod_{\nu=1}^{\nu=2\mu-1} (1 - q^{2\nu})}.$$

De même, le second produit peut s'écrire, en vertu de l'identité

$$\frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\nu\omega - \cos\mu\omega} = \frac{(1 + q^{2\nu})^2}{(1 - q^{2\nu-2\mu})(1 - q^{2\nu+2\mu})},$$

$$\prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\nu\omega - \cos\mu\omega} = \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} (1 + q^{2\nu})^2}{\prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} (1 - q^{2\nu-2\mu})(1 - q^{2\nu+2\mu})};$$

et, si l'on remarque qu'au dénominateur la différence $(\nu - \mu)$ varie de 1 à $(m - \mu)$, et la somme $(\nu + \mu)$ de $(2\mu + 1)$ à $(m + \mu)$, on peut écrire

$$\prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\nu\omega - \cos\mu\omega} = \frac{1 - q^{4\mu}}{(1 + q^{2\mu})^2} \frac{\prod_{\nu=\mu}^{\nu=m} (1 + q^{2\nu})^2}{\prod_{\nu=1}^{\nu=m-\mu} (1 - q^{2\nu}) \prod_{\nu=2\mu}^{\nu=m+\mu} (1 - q^{2\nu})};$$

remplaçant, dans l'expression (11), en remarquant que

$$\frac{1-q^{4\mu}}{(1+q^{2\mu})^2} = \frac{1-q^{2\mu}}{1+q^{2\mu}}$$

et que

$$\frac{1}{1-\cos\mu\omega} = -\frac{2q^{2\mu}}{(1-q^{2\mu})^2},$$

on a enfin

$$A_\mu = \frac{2q^\mu}{1+q^{2\mu}} \frac{\prod_{\nu=1}^{\nu=m}(1+q^{2\nu})^2}{\prod_{\nu=1}^{\nu=m-\mu}(1-q^{2\nu}) \prod_{\nu=1}^{\nu=m+\mu}(1-q^{2\nu})}.$$

Telle est la valeur que l'on tire pour A_μ des $(m-1)$ équations (7); pour avoir le coefficient A_μ du développement cherché, il faut faire croître m indéfiniment. On a donc, en posant

$$Q = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(1+q^{2\nu})^2}{(1-q^{2\nu})^2},$$

$$A_\mu = \frac{2q^\mu}{1+q^{2\mu}} Q;$$

d'ailleurs l'expression (10) de A_0 donne immédiatement $A_0 = Q$. On obtient ainsi le développement bien connu

$$\frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = Q\left(1 + 4\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}} \cos\frac{\mu\pi z}{K}\right).$$

D'après les formules indiquées dans le *Traité des Fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet (p. 479), on a

$$\frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \frac{\pi}{2gK}\sqrt{\frac{1}{k'}}\left(1 + 4\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}} \cos\frac{\mu\pi z}{K}\right).$$

La comparaison entre ce développement et celui que nous venons d'établir donne

$$\frac{\pi}{2gK}\sqrt{\frac{1}{k'}} = Q,$$

ce qui est d'accord avec des formules bien connues, dues à Jacobi.

Remarques sur l'emploi de la méthode précédente, par M. H. Poincaré.

(Séance du 20 décembre 1884.)

Dans la méthode élémentaire que vient d'introduire M. Appell dans la théorie des fonctions elliptiques, et dont l'importance n'échappera à personne, ce savant géomètre a été conduit à envisager une infinité d'équations linéaires contenant une infinité d'inconnues. Comme des équations de même forme peuvent se rencontrer dans d'autres problèmes, il importe de rechercher dans quels cas on peut légitimement employer la méthode qui a réussi à M. Appell, c'est-à-dire prendre m des équations proposées, n'y conserver que les m premières inconnues en y supprimant tous les termes qui dépendent des autres inconnues; calculer les valeurs des inconnues conservées, et enfin faire croître le nombre m indéfiniment.

J'envisagerai d'abord une série indéfinie de nombres

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots,$$

tels que

$$|a_{n+1}| > |a_n|, \quad \lim |a_n| = \infty \quad \text{pour } n = \infty.$$

Je chercherai ensuite à déterminer une autre série de nombres

$$A_1, \ A_2, \ \ldots, \ A_n, \ \ldots,$$

tels que les séries

$$A_1 a_1^p + A_2 a_2^p + \ldots + A_n a_n^p + \ldots$$

(où l'on fait successivement $p = 0, 1, 2, \ldots$, ad inf.) soient toutes absolument convergentes et aient pour somme 0. J'ai ainsi, pour déterminer les quantités A, une infinité d'équations homogènes et linéaires

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n a_n^p = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, \text{ad inf.}).$$

Formons la fonction entière $F(x)$, qui admet pour zéros les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Nous la supposerons de genre 0, de

telle sorte que

$$F(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)\cdots$$

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ une infinité de cercles ayant pour centre l'origine, et tels que le rayon de C_n soit compris entre $|a_n|$ et $|a_{n+1}|$. Soit J_{np} l'intégrale

$$\int \frac{x^p\,dx}{F(x)},$$

prise le long du cercle C_n. Supposons que J_{np} tende vers o, *quel que soit p*, toutes les fois que n croît indéfiniment.

Soit A_i le résidu de $\frac{1}{F(x)}$ pour $x = a_i$. Il est clair que l'hypothèse précédente peut s'écrire

$$\Sigma A_i a_i^p = 0,$$

de sorte que les A_i nous donnent une solution des équations (1).

Cette solution s'écrit

$$A_i = \frac{-a_i}{\left(1 - \frac{a_i}{a_1}\right)\left(1 - \frac{a_i}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{a_i}{a_n}\right)\cdots},$$

et elle est bien celle à laquelle conduirait la méthode de M. Appell.

Mais cette solution n'est pas unique. Il est clair, en effet, que les quantités $A_i a_i$, $A_i a_i^2$, ... satisferont également aux équations (1).

Plus généralement, soit

$$S_p = \Sigma\,|A_n a_n^p|;$$

S_p est finie, puisque nos séries sont supposées absolument convergentes.

Soient

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots$$

des nombres tels que la série

$$\lambda_0 S_0 + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots + \lambda_p S_p + \ldots$$

soit absolument convergente.

Alors les quantités

$$A_i(\lambda_0 + \lambda_1 a_i + \lambda_2 a_i^2 + \ldots)$$

satisferont aux équations (1), comme les quantités A_i elles-mêmes.

Si l'on se propose de trouver la solution la plus générale de ces équations (1), on rencontre de grandes difficultés. Voici, toutefois, une remarque qu'il est aisé de faire.

Soit

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

une solution quelconque des équations (1). La série

$$\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}+\ldots$$

sera absolument convergente et représentera une fonction méromorphe qu'on pourra écrire sous la forme du quotient de deux fonctions entières

$$\frac{\psi(x)}{F(x)}.$$

Alors la condition nécessaire et suffisante, que la fonction $\psi(x)$ devra remplir, sera la suivante :

L'intégrale

$$\int \frac{\psi(x)x^p\,dx}{F(x)},$$

prise le long de C_n, devra tendre vers zéro, quel que soit p, quand n croîtra indéfiniment.

On voit, par cette seule remarque, que les conditions imposées par les équations (1) aux quantités A sont plutôt, pour ainsi dire, des conditions d'inégalité que des conditions d'égalité.

Si, de même, on considère une double infinité de nombres donnés

$$\begin{array}{l} \alpha_{10}, \alpha_{20}, \ldots, \alpha_{n0}, \ldots, \\ \alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \\ \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \\ \alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \ldots, \alpha_{np}; \ldots, \end{array}$$

puis qu'on cherche à déterminer les quantités A, de façon à satisfaire aux équations

$$(1\ bis) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha_{np} = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, \text{ad inf.}),$$

on envisagera une infinité de nombres choisis d'une façon quelconque

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

et l'on formera la fonction entière $F(x)$, qui admet ces nombres pour zéros. On pourra évidemment toujours s'arranger pour que cette fonction entière soit de genre o.

On pourra ensuite toujours trouver une infinité de fonctions entières

$$\theta_0(x),\ \theta_1(x),\ \theta_2(x),\ \ldots,\ \theta_p(x),\ \ldots,$$

satisfaisant aux conditions

$$\theta_p(a_n) = \alpha_{np}.$$

Cela posé, on obtiendra la solution générale des équations (1 *bis*), en cherchant toutes les fonctions entières $\psi(x)$, telles que

$$\lim \left[\int \frac{\psi(x)\theta_p(x)\,dx}{F(x)} \text{ prise le long de } C_n \right] = 0 \quad \text{pour } n = \infty,$$

quel que soit p.

Les résidus de la fonction $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ seront alors les quantités A cherchées.

Ces considérations sommaires montrent que la solution obtenue par la méthode de M. Appell n'est pas unique; il y a même des cas où elle n'existe pas.

Il ne suffit pas, en effet, que la fonction $F(x)$ soit de genre o pour que cette solution convienne. Ainsi revenons aux équations

$$(1) \qquad \Sigma A_n a_n^p = 0,$$

en faisant

$$a_n = (n - \tfrac{1}{2})^2 \pi^2,$$

de telle sorte que

$$F(x) = \cos\sqrt{x}$$

soit de genre o.

Je dis que les résidus de la fonction $\frac{1}{F(x)}$ ne nous donnent pas une solution des équations (1). En effet, si l'on appelle A_n le $n^{\text{ième}}$ résidu, on trouve

$$A_n = -\frac{2\sqrt{a_n}}{\sin\sqrt{a_n}} = \pm(2n-1)\pi,$$

et la série ΣA_n n'est pas convergente.

Je me réserve de revenir plus tard sur ces importantes questions, que je ne fais ici qu'effleurer, et j'ai hâte d'arriver à des équations se rapprochant davantage de celles qui ont été traitées par M. Appell.

J'envisagerai alors une série doublement infinie de nombres

$$\ldots,\ a_{-n},\ \ldots,\ a_{-2},\ a_{-1};\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

tels que

$$|a_{n+1}| > |a_n|,\quad \lim |a_n| = \infty \text{ ou } 0 \quad \text{pour } n = +\infty \text{ ou } -\infty,$$

et je formerai les équations

$$(2) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n a_n^p = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, \text{ad inf.}).$$

On reconnaît aisément ici les équations mêmes traitées par M. Appell : il suffit d'y donner aux lettres qui y entrent des valeurs convenables, comme on le verra d'ailleurs plus loin.

Formons une fonction $F(x)$, admettant les a pour zéros et n'ayant pas de pôles. Ce ne sera pas une fonction entière, mais une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan, sauf à l'origine, qui est un point singulier essentiel.

Soit une série doublement infinie de cercles

$$\ldots,\ C_{-n},\ \ldots,\ C_{-2},\ C_{-1};\ C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,\ \ldots,$$

ayant pour centre l'origine, et tel que le rayon de C_n soit, quel que soit n, compris entre $|a_n|$ et $|a_{n+1}|$. Soit J_{np} l'intégrale

$$\int \frac{x^p\,dx}{F(x)},$$

prise le long du cercle C_n.

Supposons que, quand n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, J_{np} tende vers 0. Alors les résidus de la fonction $\frac{1}{F(x)}$ satisferont aux équations proposées ; c'est le résultat que nous avions trouvé plus haut dans le cas des équations (1).

Appliquons-le aux équations de M. Appell en reprenant les notations de ce géomètre.

Il s'agit de déterminer les coefficients A_μ du développement

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_\mu e^{\mu x},$$

par l'identité

$$(3) \qquad \Theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \Theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) \Sigma A_\mu e^{\mu x},$$

et l'on est ainsi conduit aux équations suivantes

$$(-1)^n = \Sigma(-1)^\mu q^{-2\mu n} A_\mu q^{\mu^2},$$

que nous écrirons, pour rétablir la symétrie et l'homogénéité, sous la forme

$$(4) \qquad \Sigma_\mu H_\mu (q^{-2\mu})^n + B(-1)^n = 0,$$

en faisant

$$H_\mu = (-1)^\mu A_\mu q^{\mu^2}.$$

Il faudra ensuite faire $B = -1$ dans le résultat.

Dans les équations (4) le nombre n peut prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. L'analogie des équations (4) avec les équations (2) est d'ailleurs évidente, et les quantités a sont -1 d'une part, et d'autre part $q^{-2\mu}$, où μ prend toutes les valeurs positives et négatives, et même la valeur 0.

La fonction $F(x)$ s'écrira alors

$$(x-1)(x+1)\Pi_\mu\left[1 - q^{2\mu}\left(x + \frac{1}{x}\right) + q^{4\mu}\right] = \lambda(x+1)\sqrt{x}\,\theta_1(\log x).$$

Dans cette identité λ est une constante qu'il est inutile de déterminer davantage, et θ_1 est la fonction qui est désignée ainsi par MM. Briot et Bouquet, en supposant la première période ω égale à $2i\pi$. Nous écrirons alors, pour abréger,

$$\theta_1(\log x) = \Phi(x)$$

et $\Phi(x)$ sera une fonction admettant l'origine comme point singulier essentiel, holomorphe dans tout le reste du plan, et jouissant de la propriété

$$(5) \qquad x\Phi(q^2 x) = h\Phi(x),$$

h étant une constante qu'il est inutile de déterminer davantage.

Soit maintenant une infinité de cercles C_μ ayant leurs centres à l'origine, et soit ρ_μ le rayon de C_μ. Nous prendrons

$$|q|^2 \rho_{\mu+1} = \rho_\mu.$$

Soient $J_{\mu n}$, $K_{\mu n}$ et $\Lambda_{\mu n}$ les intégrales

$$\int \frac{x^n\,dx}{(x+1)\Phi(x)\sqrt{x}}, \quad \int \frac{x^n\,dx}{\Phi(x)},$$

prises le long de C_μ. On aura évidemment

$$|J_{\mu n}| < K_{\mu n},$$

puisque le module d'une somme est plus petit que la somme des modules des éléments.

On aura, d'autre part,

$$K_{\mu n} < \frac{1}{m} \Lambda_{\mu n},$$

m étant la plus petite valeur absolue que puisse prendre

$$\sqrt{x}(x+1)$$

le long du cercle d'intégration ; ou bien

$$K_{\mu n} < \frac{1}{\sqrt{\rho_\mu}\,|\rho_\mu - 1|} \Lambda_{\mu n},$$

$$\Lambda_{\mu+1 \cdot n} = \Lambda_{\mu n} \frac{h}{q^{4n+2}} \frac{1}{\rho_\mu}.$$

Faisons tendre μ vers $+\infty$, ρ_μ tend vers ∞, le rapport $\frac{\Lambda_{\mu+1 \cdot n}}{\Lambda_{\mu \cdot n}}$ tend vers o et par conséquent $\Lambda_{\mu n}$ tend vers o.

Si, au contraire, μ tend vers $-\infty$, ρ_μ tend vers o, le rapport $\frac{\Lambda_{\mu+1 \cdot n}}{\Lambda_{\mu \cdot n}}$ tend vers ∞ et $\Lambda_{\mu n}$ tend encore vers o.

On en conclurait aisément que l'intégrale $J_{\mu n}$ tend elle-même vers o quand μ tend vers $\pm\infty$, quelle que soit la valeur entière positive ou négative de *n*.

Donc, d'après les principes posés plus haut, les résidus de la fonction

$$\frac{1}{\lambda(x+1)\Phi(x)\sqrt{x}},$$

satisferont aux équations (4).

On trouve ainsi

$$B = \frac{-1}{2\Pi(1+q^{2\mu})^2}, \quad H_0 = \frac{1}{2\Pi(1-q^{2\mu})^2},$$

$$\frac{1}{H_\mu} = (q^{-4\mu}-1)(q^{6\mu}-q^{2\mu})^2\,\Pi(1-q^{2\nu+2\mu})\,\Pi(1-q^{2\nu-2\mu}),$$

où ν prend toutes les valeurs 1, 2, ... ad inf., à l'exception de la

valeur μ, ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{H_\mu} = -q^{-2\mu}(1-q^{4\mu})^2\Pi(1-q^{2\mu+2\nu})\Pi(1-q^{2\nu-2\mu}),$$

ν étant toujours soumis à la même restriction, ou bien

$$\frac{1}{H_\mu} = -q^{-2\mu}(1-q^{4\mu})\Pi(1-q^{2\omega}),$$

le nombre entier ω pouvant prendre :

1° Une fois toutes les valeurs négatives depuis $1-\mu$ jusqu'à -1;

2° Une fois toutes les valeurs positives depuis 1 jusqu'à μ;

3° Deux fois toutes les valeurs positives depuis $\mu+1$ jusqu'à $+\infty$.

Mais nous pouvons écrire

$$\prod_{\omega=1-\mu}^{\omega=-1}(1-q^{2\omega}) = \Pi(-q^{2\omega})\Pi(1-q^{-2\omega}) = (-1)^{\mu-1}q^{-\mu(\mu-1)}\Pi(1-q^{-2\omega}),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{H_\mu} = -q^{-2\mu}(1-q^{4\mu})\Pi(1-q^{2\omega})[(-1)^{\mu-1}q^{-\mu(\mu-1)}]$$

(ω pouvant prendre deux fois toutes les valeurs positives depuis 1 jusqu'à l'infini, à l'exception de la valeur μ que ce nombre ne peut prendre qu'une seule fois), ou enfin

$$\frac{1}{H_\mu} = (-1)^\mu q^{-\mu^2-\mu}(1+q^{2\mu})\Pi(1-q^{2\nu})^2,$$

le nombre ν pouvant prendre une fois et une seule toutes les valeurs entières positives. On a ainsi, pour la valeur définitive de H_μ,

$$H_\mu = (-1)^\mu q^{\mu^2}\frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}}\,\frac{1}{\Pi(1-q^{2\nu})^2}.$$

Nous allons maintenant multiplier les quantités B, H_0 et H_μ que nous venons de trouver par le facteur $2\Pi(1+q^{2\nu})^2$, de façon à ramener B à sa valeur -1 et nous trouverons, en revenant aux

notations de M. Appell et posant comme lui

$$Q = \prod \left(\frac{1+q^{2\nu}}{1+q^{-2\nu}}\right)^2,$$

$$B = 1, \quad H_0 = Q, \quad H_\mu = (-1)^\mu q^{\mu^2} \frac{2q^\mu}{1+q^{2\mu}} Q$$

et enfin

$$A_0 = Q, \quad A_\mu = \frac{2q^\mu}{1+q^{2\mu}} Q, \quad A_\mu = -A_{-\mu}.$$

Nous avons donc retrouvé la solution de M. Appell, et je ne crois pas qu'on puisse faire d'objection à la méthode que je propose pour démontrer que cette solution satisfait effectivement aux équations (4).

Mais cette solution n'est pas unique. Il est clair en effet que les quantités

$$B = -1, \quad H'_\mu = H_\mu[c(-q^{2\mu})^p + d(-q^{2\mu})^{-p}]$$

(où p est entier et où $c + d = 1$) ainsi que les combinaisons linéaires de pareilles quantités satisferont, comme les quantités H_μ elles-mêmes, à ces mêmes équations.

Il arrive, si $c = d$, que l'on a encore

$$H'_\mu = H'_{-\mu}.$$

Les équations (4) admettent donc une infinité de solutions et cependant il est clair qu'il n'y a qu'un seul développement convergent

$$\Sigma A_\mu e^{\mu x},$$

qui puisse satisfaire à l'identité (3).

On doit en conclure que, parmi les solutions en nombre infini qui satisfont à nos équations (4), il n'y en a qu'une seule qui conduise à un développement $\Sigma A_\mu e^{\mu x}$ convergent. Il est d'ailleurs aisé de voir que cette solution est celle de M. Appell.

En effet, si nous posons

$$A_\mu^p = (-1)^p \frac{q^{(2p+1)\mu}}{1+q^{2\mu}} Q,$$

on vérifiera que A_μ^p est une solution des équations (4) pour toutes les valeurs entières de p, mais que la série $\Sigma A_\mu^p e^{\mu x}$ est convergente pour $p = 0$ et pour $p = 0$ seulement.

Sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés; par M. Weill.

(Séance du 20 décembre 1884.)

Un nombre étant mis sous la forme d'une somme de quatre carrés, il existe des relations simples entre le nombre des décompositions de l'entier considéré et celui des décompositions de certains multiples de cet entier en une somme de quatre carrés.

Le nombre N étant mis sous la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, nous chercherons à mettre pN sous la forme d'une somme de carrés de quatre nombres, dont chacun soit une fonction linéaire et homogène, à coefficients entiers, de x, y, z, t. Pour commencer par un cas particulièrement simple, considérons les deux identités

$$\begin{aligned} 4N &= 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \\ &= (x+y+z+t)^2 + (x+y-z-t)^2 + (x-y-z+t)^2 + (x-y+z-t)^2, \\ 4N &= (x+y+z-t)^2 + (x+y-z+t)^2 + (x-y+z+t)^2 + (x-y-z-t)^2. \end{aligned}$$

Ces deux décompositions de 4N sont les seules qui répondent aux conditions imposées; car chacune des fonctions linéaires contient nécessairement les quatre lettres x, y, z et t avec les coefficients $+1$ ou (-1), et l'on voit facilement comment ces coefficients doivent être distribués pour que les rectangles des variables disparaissent dans la somme. Dès lors, à une décomposition de N en quatre carrés, correspondront deux décompositions de 4N en quatre carrés; mais il faut chercher si, inversement, toute décomposition de 4N en quatre carrés peut être représentée par l'une ou l'autre des identités considérées. Nous considérerons le cas où, N étant impair, on se propose de décomposer 4N en une somme de quatre carrés tous impairs. Désignons par (A) un nombre entier impair, et dont le signe est choisi de manière qu'il soit un multiple de 4, plus 1, ce qui est toujours possible. Je dis qu'il existe des entiers x, y, z et t vérifiant les équations

$$\begin{aligned} x+y+z+t &= (A), \\ x+y-z-t &= (B), \\ x-y-z+t &= (C), \\ x-y+z-t &= (D), \\ x^2+y^2+z^2+t^2 &= N. \end{aligned}$$

En effet, de ces équations on tire

$$\begin{aligned}4x &= (A)+(B)+(C)+(D),\\4y &= (A)+(B)-(C)-(D),\\4z &= (A)+(D)-(B)-(C),\\4t &= (A)+(C)-(B)-(D);\end{aligned}$$

et les valeurs de x, y, z, t sont entières.

Les nombres de x, y, z, t étant déterminés, les nombres E, F, G, H, qui vérifient les égalités

$$\begin{aligned}E^2+F^2+G^2+H^2 &= 4N,\\x+y+z-t &= E,\\x+y-z+t &= F,\\x-y+z+t &= G,\\x-y-z-t &= H\end{aligned}$$

sont tous impairs; ils sont donnés, en effet, par les relations

$$\begin{aligned}2E &= (A)+(B)+(D)-(C),\\2F &= (A)+(B)+(C)-(D),\\2G &= (A)+(C)+(D)-(B),\\2H &= (B)+(C)+(D)-(A).\end{aligned}$$

Il en résulte qu'un système de valeurs x, y, z, t donne, pour $4N$, deux systèmes de nombres, tous impairs, A, B, C, D et E, F, G, H. D'ailleurs, à deux systèmes de nombres x, y, z, t et x', y', z', t' *différents,* ne peuvent correspondre, *en grandeur et en signe,* les mêmes valeurs de (A), (B), (C), (D); car le système d'équations

$$\begin{aligned}x+y+z+t &= x'+y'+z'+t',\\x+y-z-t &= x'+y'-z'-t',\\x-y-z+t &= x'-y'-z'+t',\\x-y+z-t &= x'-y'+z'-t'\end{aligned}$$

n'admet, comme solutions, que $x=x', y=y', z=z', t=t'$.

D'autre part, si l'on change les signes des quatre nombres (A), (B), (C), (D), les valeurs de x, y, z, t changent de signe sans changer de grandeur; si l'on change les signes de une ou trois des quantités (A), (B), (C), (D), les valeurs de $x, y, \ldots$ ne sont plus entières, comme le montrent les expressions de $4x$, $4y$, ... Reste à examiner le cas où l'on change le signe de deux des quan-

tités (A), (B), (C), (D); supposons que ces changements de signe, *qui ne changent pas la forme de décomposition de* 4N, engendrent deux systèmes différents de nombres x, y, z, t et x', y', z', t', on aurait, par exemple, les équations

$$\begin{aligned} x+y+z+t &= x'+y'+z'+t', \\ x+y-z-t &= -(x'+y'-z'-t'), \\ x-y-z+t &= -(x'-y'-z'+t'), \\ x-y+z-t &= x'-y'+z'-t'; \end{aligned}$$

ces équations donnent

$$\begin{aligned} x &= z', \\ z &= x', \\ y &= t', \\ t &= y'; \end{aligned}$$

donc les systèmes des nombres x, y, z, t et x', y', z', t' ne donnent pas, pour

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

deux décompositions distinctes. De tout ce qui précède, il résulte que, si le nombre impair N a été décomposé en quatre carrés, le nombre 4N admettra deux décompositions correspondantes en une somme de quatre carrés tous impairs, et que, inversement, toute décomposition de 4N en une somme de quatre carrés tous impairs pourra être obtenue par cette correspondance. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — N *étant un entier impair, le nombre des décompositions de* 4N *en une somme de quatre carrés tous impairs est double du nombre des décompositions de* N *en quatre carrés.*

Ce théorème est dû à Jacobi, qui l'a déduit de l'identité

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

dans la théorie des fonctions elliptiques.

La démonstration exposée plus haut donne la raison de ce théorème et le moyen de former les décompositions de 4N connaissant celles de N, et inversement.

Pour donner une autre application de la même méthode, consi-

dérons l'identité

$$3(x^2+y^2+z^2+t^2)=(x+y+z)^2+(x-y+t)^2$$
$$+(y+t-z)^2+(z+t-x)^2;$$

de cette identité, on en déduit trois autres, en faisant une permutation circulaire sur x, y, z et t.

Donc, si l'entier N a été mis sous la forme d'une somme de quatre carrés, l'entier 3N sera mis, de quatre manières différentes, sous la forme d'une somme de quatre carrés. Inversement, soit N un nombre non multiple de 3, l'entier 3N étant mis sous la forme

$$3N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2;$$

on aura nécessairement pour l'un des quatre nombres, soit A, un multiple de 3, les trois autres étant des multiples de 3, plus ou moins 1.

En désignant par (B) le nombre B affecté d'un signe convenable, on aura donc

$$\left.\begin{array}{l}(A)\equiv 0\\ (B)\equiv 1\\ (C)\equiv 1\\ (D)\equiv 1\end{array}\right\}\pmod 3.$$

Ceci posé, les trois équations

$$\begin{aligned}x+y+z&=(A),\\ x-y+t&=(B),\\ y+t-z&=(C),\\ z+t-x&=(D)\end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned}3t&=(B)+(C)+(D),\\ 3x&=(A)+(B)-(D),\\ 3y&=(A)+(C)-(B),\\ 3z&=(A)+(D)-(C),\end{aligned}$$

et les valeurs de x, y, z, t sont entières

On voit que, N étant un entier quelconque multiple de 3, ou non-multiple de 3, le nombre 3N admet quatre fois autant de décompositions en quatre carrés quelconques que le nombre N, si l'on ne tient pas compte des signes; et en effet, habituellement, on considère comme distinctes des décompositions qui ne dif-

fèrent que par le signe d'un des nombres A, B, C, D, d'où l'énoncé que j'ai donné dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (17 novembre 1884). Mais, si l'on tient compte des signes, le résultat est différent, comme on va le voir, et n'est simple que lorsque N n'est pas multiple de 3. Notre analyse prouve que, le signe des trois nombres B, C, D ayant été choisi, on ne peut changer le signe de l'un ou de deux de ces nombres, mais celui des trois à la fois, ce qui revient à changer le signe de A; car, en changeant le signe de B, par exemple, ou les signes de B et C, les nombres x, y, z, t ne sont plus tous des entiers. Donc, 3N ayant été mis sous la forme

$$3N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

il y aura deux systèmes de nombres $x, y, z, t, x', y', z', t'$ *dont les signes et les valeurs seront entièrement déterminés*, correspondant à deux décompositions de N; on aura

$$\begin{aligned}3t &= (B) + (C) + (D),\\ 3x &= (A) + (B) - (D),\\ 3y &= (A) + (C) - (B),\\ 3z &= (A) + (D) - (C);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3t' &= 3t,\\ 3x' &= -(A) + (B) - (D),\\ 3y' &= -(A) + (C) - (B),\\ 3z' &= -(A) + (D) - (C).\end{aligned}$$

Les relations entre les deux systèmes sont

$$\begin{aligned}t' &= t,\\ 3x' &= x - 2y - 2z,\\ 3y' &= y - 2x - 2z,\\ 3z' &= z - 2z - 2y\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}x + y + z &= -(x' + y' + z')\\ x - y + t &= x' - y' + t',\\ y + t - z &= y' + t' - z',\\ z + t - x &= z' + t' - x'.\end{aligned}$$

Ces deux systèmes sont distincts en général. En effet, supposons

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription : les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

10473. Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gerant : Gauthier-Villars.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XIII. — N° 2.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1885

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

$x' = x$, on en déduit

$$z' = z, \quad y' = y,$$

et, par suite,

$$x + y + z = (A) = 0,$$

ce qui est impossible, si l'on suppose 3N décomposé en quatre carrés et non en un nombre moindre de carrés.

D'autre part, en supposant $x' = -x$, on en déduit

$$y + z = 2x,$$

d'où

$$(B) = (D),$$

ce qui est impossible, si 3N a été décomposé en quatre carrés distincts. En supposant $x' = y$, on en déduit

$$y' = 2y - x,$$
$$z' = x - z - y.$$

Pour que les deux systèmes ne soient pas distincts, il faut alors

$$y' = 2y - x = \pm x \quad \text{ou} \quad y' = 2y - x = \pm z;$$

aucune de ces solutions ne convient, si l'on suppose N décomposé en quatre carrés distincts, dont aucun n'est nul. Enfin, si l'on suppose $x' = -y$, on en déduit

$$x + y = 2z,$$

ce qui est impossible, car on aurait alors

$$(D) = (C).$$

De tout ce qui précède résulte le théorème suivant :

Théorème. — N *étant un entier non multiple de* 3, *si les deux nombres* N *et* 3N *n'admettent l'un et l'autre que des décompositions en quatre carrés positifs, non nuls, et distincts, le nombre des décompositions de* 3N *est double du nombre des décompositions de* N.

Ce théorème renferme le cas général qui se présente; car, si N est, par exemple, décomposable en trois carrés, cela constitue un cas exceptionnel. La démonstration du théorème prouve que, à une décomposition d'un nombre quelconque N en quatre carrés,

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, correspondent les quatre décompositions de ce même nombre, données par les formules

$$t' = t, \quad x' = \frac{x - 2y - 2z}{3}, \quad y' = \frac{y - 2x - 2z}{3}, \quad z' = \frac{z - 2x - 2y}{3},$$

et par celles que l'on en déduit par permutation circulaire; mais ces nouvelles solutions n'en engendrent pas d'autres.

(*A suivre.*)

Méthode pour mener les plans tangents aux surfaces gauches; par M. J. Marchand.

(Séance du 14 novembre 1884.)

1. *Définitions.* — Nous appelons *axoïde* toute surface gauche ayant une directrice rectiligne, et *axe* celle-ci.

Nous distinguons deux classes parmi ces surfaces :

Dans la première nous rangeons les conoïdes droits;

Dans la deuxième toutes les autres, qui prendront le nom d'*axoïdes ordinaires*.

Tout plan perpendiculaire à l'axe sera dit *plan principal;* l'orientation commune de tous les plans que l'on peut ainsi mener sera la *direction principale,* enfin leurs intersections avec l'axoïde les *sections principales :* dans les conoïdes nous réserverons cette dénomination à leurs intersections à l'infini avec les plans principaux, en faisant abstraction des génératrices que ces plans peuvent contenir. On donnera également le nom de *point principal* au point de rencontre de l'axe avec un plan principal.

Tout plan contenant l'axe sera dit *axial :* toute génératrice rectiligne de la surface est ainsi contenue dans un plan axial, que nous appellerons aussi quelquefois son *plan de variance.* Plusieurs génératrices peuvent avoir même plan de variance, mais nous ne considérons jamais que l'une d'entre elles à la fois; le point où elle coupera l'axe sera son *point axial,* l'angle qu'elle forme avec l'axe en prenant toujours l'axe comme droite origine, son *angle axial.*

2. Cela posé, supposons que par tous les points axiaux d'un axoïde quelconque, et dans les mêmes plans axiaux que les génératrices correspondantes, on trace des droites telles que le rapport de la tangente de leur angle axial β à la tangente de l'angle axial α de la génératrice qui leur correspond soit constant et égal à une quantité complètement arbitraire μ. On formera ainsi un nouvel axoïde, ayant même axe, mêmes points axiaux que le premier, et dont les génératrices seront correspondantes une à une des génératrices de celui-ci, et liées par la relation

$$\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha} = \mu.$$

Ce nouvel axoïde, qu'on peut immédiatement obtenir à l'aide du premier, qui sera dit l'*axoïde fixe,* sera lui-même un axoïde variant; la constante μ s'appellera le *rapport de variance,* enfin deux génératrices issues d'un même point axial seront deux *correspondantes.*

Il résulte immédiatement de ces définitions :

1° *Que, pour un axoïde fixe, il existe une infinité de variants;*

2° *Que nous pouvons prendre arbitrairement comme surface fixe l'un des deux axoïdes;*

3° *Que deux axoïdes variants d'un troisième sont variants l'un de l'autre.*

Soit maintenant le cône directeur de l'axoïde fixe, et par son sommet conduisons une parallèle à l'axe; en considérant cette droite comme axe du cône, on pourra lui appliquer des constructions analogues aux précédentes et définir ainsi un cône, qui sera directeur de l'axoïde variant et pourra être considéré comme variant du cône de l'axoïde fixe, jouissant par rapport à lui de propriétés identiques à celles ci-dessus énumérées.

Nous dirons enfin, quand les surfaces variantes que nous aurons à examiner seront dans la position même qui résulte de leur mode de génération, c'est-à-dire avec axe, points et plans axiaux superposés, qu'elles sont non déplacées; lorsque nous les aurons fait glisser, par rapport à l'axoïde fixe, le long de l'axe, par un mouvement de translation d'une quantité déterminée a, qu'elles sont déplacées, et a sera le déplacement.

3. Théorème. — *Si deux cônes variants ou deux axoïdes variants non déplacés sont coupés par un plan principal, les sections principales correspondantes sont homothétiques, et le point principal du plan sécant est le centre d'homothétie.*

Cette proposition est évidente.

4. Théorème. — *L'intersection de deux cônes variants déplacés est une section principale.*

Soit, en effet, oo_1p l'axe commun des deux cônes, et om, o_1m deux génératrices correspondantes; du point m, où elles se coupent, abaissons mp perpendiculaire à l'axe.

En observant que

$$oo_1 = a \quad \text{et} \quad \frac{\tang \beta}{\tang \alpha} = \mu,$$

on a

$$op = a\,\frac{\mu}{\mu - 1}.$$

5. Les deux théorèmes qui précèdent conduisent immédiatement aux remarques suivantes :

1° Si la surface conique est plane (nous entendons par là un plan faisant avec l'axe un angle quelconque non égal à 90°), ses variantes seront également planes. Les sections principales correspondantes seront alors des droites parallèles normales à l'axe, et les lignes de plus grandes pentes de ces plans par rapport à la direction principale, issues de leur sommet commun, seront contenues dans le même plan axial.

Par conséquent, si un axoïde ordinaire a pour surface directrice un plan, ses variants auront également des plans pour surfaces directrices.

2° Si le *rapport de variance* varie d'une manière continue entre $-\infty$ et $+\infty$, pour ces deux limites, le cône variant se réduit au plan principal issu du sommet du cône; pour la valeur zéro, il se réduit à l'axe.

Par conséquent, le conoïde obtenu en conservant l'axe et les points et plans axiaux d'un système de surfaces variantes est la limite commune de ces surfaces lorsque le rapport de variance devient égal à $\pm\infty$, et l'axe est la limite de ces surfaces pour la valeur zéro de ce rapport.

D'après cela, les surfaces de la première classe peuvent en général être considérées comme les limites des surfaces de la deuxième; on peut en conclure aussi qu'une surface de la première classe peut d'une infinité de manières différentes dériver de celles de la seconde, puisque tous les systèmes de variants ayant même axe, mêmes points et plans axiaux, ont le même conoïde pour limite.

6. Théorème. — *L'intersection d'un axoïde et d'un variant de son cône directeur déplacé d'un mouvement de translation, de manière que son sommet vienne se placer sur l'axe de l'axoïde, se projette sur le plan principal mené par ce sommet, suivant une courbe homothétique à la section principale correspondante, et le sommet est le centre d'homothétie.*

Prenons un point axial quelconque de la surface, et dans ce plan les deux génératrices correspondantes oM_1, GM_1 de la surface et du cône. Ces droites font respectivement avec l'axe OG les angles α et β. Soit également m_1MG la trace du plan principal conduit par le sommet G du cône variant sur le plan axial; cette trace est normale à l'axe. Projetons sur elle M_1 en m_1; de M_1 également abaissons M_1K_1 perpendiculaire sur l'axe, et de M la normale Mm.

On a par hypothèse

$$\frac{\tang\beta}{\tang\alpha} = \mu.$$

D'ailleurs, puisque

$$m_1G = M_1m + MG,$$

il viendra immédiatement

$$\frac{m_1G}{MG} = \frac{\mu}{\mu - 1},$$

ce qui établit la proposition.

7. Ce théorème permet de mener le plan tangent à un axoïde ordinaire, en un point quelconque d'une de ses génératrices. Soit, en effet, une telle surface définie par son axe, une de ses sections principales et son cône directeur.

Nous voulons obtenir son plan tangent au point M_1 de la génératrice AB; par le point principal G du plan sécant, comme som-

met, faisons passer un variant du cône directeur; nous pourrons toujours le supposer tel qu'il passe par le point M_1, et tracer sur la figure la génératrice M_1G, correspondante de AB : ce cône détermine par son intersection avec l'axoïde une courbe dont la tangente en M_1 pourra être construite.

En effet, d'après le théorème précédent, on connaît son plan projetant. Contenue, d'autre part, dans le plan tangent au cône variant le long de la génératrice M_1G, nous voyons :

1° Que, si nous menons par G, GI trace du plan tangent au cône variant qui est parallèle à la trace du plan tangent au cône directeur le long de la génératrice correspondante de GI;

2° Que, si par m_1, projection de M_1 sur le rayon vecteur GA, nous conduisons m_1I parallèle à la tangente au point A de la section principale NAP, le point I où ces deux droites se rencontrent est la trace de cette tangente sur la section principale, et par suite un point de la trace du plan tangent à l'axoïde en M_1 : AI est donc cette trace, et le plan tangent est déterminé.

8. D'après cela, étant donné un axoïde, dont en deux points M_1, M_2, situés sur une même génératrice AB, on connaît le plan tangent, nous menons un plan principal que nous considérons comme plan horizontal de projection. Soient m_1, m_2 les projections des deux points M_1, M_2 sur ce plan; si par m_1 nous traçons une parallèle à l'horizontale du plan tangent en M_2, par m_2 une parallèle à l'horizontale du plan tangent en M_1, leur point d'intersection I, joint au point principal G, détermine une droite GI parallèle à l'horizontale du plan tangent au cône directeur le long de sa génératrice correspondant à AB.

9. Ce corollaire donne alors le suivant :

Si nous prenons trois points M_1, M_2, M_3 *sur* AB, *et leurs projections* m_1, m_2, m_3 *sur un plan principal, en menant par l'un quelconque de ces points projections* (m_2 *par exemple*) *des parallèles aux horizontales des plans tangents en* M_1, M_3, *par* m_1 *et* m_3 *des parallèles à l'horizontale du plan tangent en* M_2, *ces deux couples de droites se coupent sur la droite* II'G *parallèlement menée par* G *à l'horizontale du plan tangent*

au cône directeur de la surface le long de la génératrice qui correspond à AB.

10. Ne considérant que les deux points M_1, M_2, supposant M_1 fixe et M_2 se déplaçant sur la génératrice, l'horizontale de son plan tangent s'obtiendra en joignant le point fixe m_1 au point I mobile sur la droite fixe GI, et déterminée à chaque instant par l'intersection de GI avec la parallèle à l'horizontale du plan tangent en M_1 issue de sa projection mobile m_2. Si donc M_2 partant de M_1 marche vers le point B, le point I se rapprochera de G, se confondra avec lui, puis, lorsque M_2 aura dépassé B, s'en éloignera indéfiniment : l'horizontale m_1I pivotera ainsi autour du point m_1 en faisant d'abord avec AG un angle de plus en plus petit ; quand I se confondra avec le point G, cet angle sera nul ; il changera de signe lorsque I aura dépassé G, et, lorsque I se sera transporté à l'infini sur IG, m_1I deviendra parallèle à IG. Si nous imaginons maintenant que M_2 s'éloigne de M_1 en marchant vers A, I s'éloignera indéfiniment de G, l'angle Gm_1I ira constamment en augmentant ; mais, quand le point I sera à l'infini, m_1I sera encore devenue parallèle à IG.

Résumant cette étude, nous dirons : Sur un axoïde ordinaire, 1° si en deux points situés sur une génératrice AB les plans tangents sont différents, il existera en général en un point quelconque d'une génératrice un seul plan tangent à la surface ; 2° ce plan tangent exécute une rotation continue autour de la génératrice, au fur et à mesure que le point de contact se déplace sur elle, de façon que, si celui-ci passe continuellement de $-\infty$ à $+\infty$, le plan tangent a exécuté une rotation continue de 180° ; 3° les deux infinis sont les seuls points pour lesquels les plans tangents se confondent ; 4° le plan tangent à l'infini est parallèle au plan tangent au cône directeur le long de sa génératrice similaire de celle que l'on considère sur la surface ; 5° enfin dans un axoïde tout plan axial fait partie du système des plans tangents, le long de la génératrice qu'il détermine, et c'est le point axial qui est le point de contact. L'axe aussi bien qu'une génératrice est donc tangent à l'axoïde en une infinité de points ; mais il se distingue aux génératrices rectilignes de la surface, en ce qu'il peut ne l'être que dans une partie limitée de son étendue.

Remarques. — 1° En dernière analyse, pour déterminer le plan tangent en un point quelconque d'un axoïde ordinaire, il faut et il suffit que les plans tangents en trois points nous soient connus. De plus, pour que la construction puisse s'effectuer avec succès, il faut que les deux parallèles m_1I, m_2I se coupent en un point fini. Or rien dans notre théorème fondamental ne suppose que ces deux droites ne soient pas parallèles. Si le fait se produisait pour une génératrice, le point I se transporterait à l'infini; par suite GI deviendrait parallèle aux deux droites m_1I, m_2I. Les trois plans en M_1, M_2, et à l'infini se confondraient; le plan tangent serait encore le même en un autre point quelconque M_3 et par suite tout le long de la génératrice; il ne saurait y avoir de doute que pour le seul point axial. En effet, si l'évanouissement du plan tangent distinct est manifeste pour tout autre point de contact, le plan axial au contraire ne change pas, et il est, évidemment, toujours tangent à la surface; au reste, c'est là une question spéciale que nous voulions simplement signaler.

2° Il pourrait se faire également que la génératrice considérée fût parallèle ou perpendiculaire au plan de projection.

Dans ces deux hypothèses la construction s'évanouit. Cette difficulté sera levée plus loin. Bornons-nous à remarquer que la génératrice normale au plan horizontal est parallèle au plan vertical; la question résolue dans le premier cas la résout par cela même pour le deuxième cas.

11. Le problème inverse du plan tangent, d'après la construction précédente, n'offre aucune difficulté : nous croyons donc inutile d'y insister.

12. On sait que deux surfaces gauches se raccordent le long d'une droite AB, lorsque ces deux surfaces ont trois plans tangents communs en trois points de cette génératrice commune.

Cela posé, soit une surface quelconque dont nous connaissons les trois plans tangents en trois points M_1, M_2, M_3 de la génératrice AB.

Dans le plan tangent en M_3, et par ce point de contact, traçons une droite faisant avec la génératrice AB un angle quelconque mais différant de 90°. Par un point G sur cette droite nous élevons

un plan perpendiculaire. Ce plan qui rencontre AB est pris par nous comme plan principal d'un axoïde ordinaire, qui aurait M_3G pour axe et dont on nous donne en outre sur AB, aux points M_1 et M_2, comme plans tangents, ceux mêmes dont nous venons de parler. La surface gauche et l'axoïde ayant trois plans tangents communs aux trois points M_1, M_2, M_3 de AB se raccorderont le long de cette droite.

13. Cette proposition prouve que toutes les propriétés énoncées au n° 10 comme caractéristiques des plans tangents aux axoïdes s'appliqueront sans restriction aux surfaces gauches en général, et en second lieu que les constructions qui permettent, connaissant trois plans tangents sur une génératrice AB d'un axoïde, de trouver un autre plan tangent sur la même génératrice s'appliqueront à une surface gauche quelconque.

14. Cela posé, si une génératrice d'une surface gauche AB rencontre le plan de projection, arbitraire d'ailleurs, comme un plan quelconque conduit suivant AB est tangent quelque part sur AB, le plan projetant de cette droite sur le plan de projection sera tangent à la surface quelque part sur AB, en B par exemple.

Supposons alors connus les trois plans tangents aux points M_1, M_2 et M_3. La surface se raccordera évidemment suivant AB avec un axoïde ayant, aux points M_1 et M_2 par exemple, mêmes plans tangents que la surface et pour axe la perpendiculaire abaissée du point B sur le plan de projection. Le théorème du n° 8 pourra être alors généralisé ainsi :

Une surface gauche quelconque étant donnée ainsi qu'un plan de projection également arbitraire (sous la restriction qu'il ne soit pas parallèle à la génératrice AB que l'on considère), *prenons sur cette droite trois points* M_1, M_2, M_3 *en lesquels le plan tangent est connu, et projetons orthogonalement ces trois points en* m_1, m_2, m_3; *sur le plan de projection par* m_1 *et* m_3 *menons des parallèles à l'horizontale du plan tangent en* M_2, *par* m_2 *des parallèles aux horizontales des plans tangents aux points* M_1 *et* M_3, *les deux droites du deuxième couple ainsi défini couperont en général respectivement celles du premier en deux points* $I_{1,2}$, $I_{3,2}$; *joignons ces deux points :*

1° *La droite ainsi obtenue est parallèle à la trace sur le plan de projection du plan tangent à l'infini à la surface gauche suivant* AB.

2° *Cette parallèle coupe* A*b*, *projection de cette génératrice, au point b où se projette le point de contact* B *du plan tangent à la surface en* AB, *qui est normal au plan de projection, c'est-à-dire au point du contour apparent de la surface sur le plan de projection qui appartient à la projection de cette génératrice.*

Remarque. — Les raisonnements qui conduisent à cet énoncé supposent que les trois points M_1, M_2 et M_3 ont des plans tangents distincts; s'il en était autrement, nous en serions avertis par les données mêmes; d'ailleurs, dans cette hypothèse, la possibilité de définir l'axoïde de raccordement n'en existerait pas moins, la surface présenterait simplement le long de AB les particularités que nous avons déjà signalées plus haut : il est à observer seulement que dans ce cas le point B reste absolument arbitraire.

14. Nous avons ainsi, à condition de changer de plan de projection, la solution générale du problème des plans tangents aux surfaces gauches, quand sur une génératrice trois plans tangents seront connus. Nous voulons montrer maintenant que les axoïdes de la première classe et en général toutes les surfaces gauches ayant un plan directeur parallèle au plan de projection admettent une construction propre. Cette construction pourra s'appliquer également lorsque sur une surface gauche se présenteront des génératrices dont le plan tangent à l'infini sera horizontal.

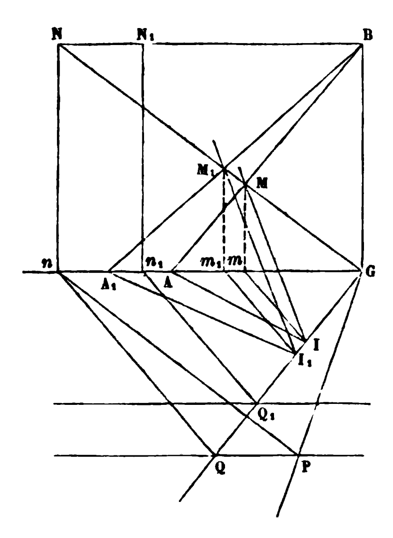
15. Plaçons-nous dans les conditions du théorème du n° 6; seulement, au lieu du cône variant qui a son sommet en G et de l'axoïde fixe, considérons tout le système des variants de celui-ci, en nous proposant de comparer leurs plans tangents aux points successifs, où la génératrice GN du cône coupe les diverses génératrices correspondantes contenues dans le plan axial ABG.

Représentons alors deux de ces génératrices BA, BA_1 coupées en M et M_1 par la droite GN et cherchons à déterminer les traces des plans tangents en ces points. Une remarque antérieure nous a appris que les tangentes en A et A_1 aux sections principales de

base sont parallèles; si donc nous projetons M et M_1 sur le plan principal en m et m_1, il faudra par ces points mener des parallèles à cette direction commune; ces droites couperont en I et I_1 la parallèle GP conduite par le point principal à l'horizontale du plan tangent à l'infini.

Si l'on joint ensuite AI, A_1I, MI, M_1I_1, les deux premières de ces quatre droites représenteront les traces horizontales des deux plans cherchés, les deux dernières les tangentes aux points correspondants M et M_1 aux courbes d'intersection du cône avec les deux axoïdes variants.

Si, considérant l'un des deux axoïdes comme fixe, on suppose que l'autre se déforme en donnant à son coefficient de variance des valeurs croissantes, la génératrice BA_1 tournera autour du point B pour atteindre, lorsque le coefficient sera ∞, la position limite NB. D'ailleurs dans ce mouvement le point M_1 se sera dé-



placé pour atteindre à la limite le point N. Dans ce même temps sa projection viendra en n, et si par n nous menons nQ parallèle à mI, le point Q représentera un point de la trace horizontale du plan tangent au conoïde limite. D'ailleurs à ce moment le point A_1 aura passé à l'infini : cette trace sera donc devenue parallèle à NB. Le point Q est ainsi l'intersection des deux droites nQ, GQ, qui

sont définies, comme on le sait, quand l'axoïde fixe du système l'est également.

Si maintenant nous avions un deuxième point N_1 sur le conoïde, et qu'on voulût déterminer son plan tangent, il suffirait de répéter la construction en menant par n_1 une parallèle à mI jusqu'à sa rencontre avec GQ en Q_1, qui appartient, d'après ce qui précède, à la trace du plan tangent cherché.

Je dis maintenant que, si nous avions pris un point P quelconque sur la trace horizontale du plan tangent en N au conoïde, les droites nP, PG auraient pu jouer le même rôle que Qn et GQ.

En effet, nous savons que le conoïde proposé est la limite de tous les systèmes qui ont même axe, mêmes points et mêmes plans axiaux. Rien donc ne s'oppose à ce que nous définissions complètement le système en ajoutant à ces données deux directions absolument arbitraires pour MQ et GQ, sous la condition unique que les parallèles à ces deux directions, menées par n et G respectivement, se coupent quelque part sur la trace horizontale du plan. Il serait aisé d'ailleurs de le démontrer en comparant entre eux deux triangles qui sont semblables et qui résultent de la double construction.

De là la proposition suivante :

Un conoïde droit étant donné et NB *une génératrice, au point* N *de laquelle on connaît son plan tangent, au point n qui représente sa projection sur le plan principal qui sert de plan de projection et au point principal* G *joignons un point quelconque* P *de la trace horizontale du plan tangent en* N; *si ensuite on veut déterminer le plan tangent en* N_1, *on mènera une parallèle par sa projection* n_1 *à la direction* Pn *jusqu'à sa rencontre avec* GP, *et le point* P_1 *d'intersection appartiendra à la trace horizontale du plan tangent cherché.*

16. Nous pourrions maintenant compléter l'étude des plans aux axoïdes variants par diverses remarques intéressantes au point de vue géométrique, mais nous nous bornerons à énoncer les suivantes :

1° *Toutes les tangentes des courbes d'intersection d'un*

système de variants par un cône variant étant parallèles, toutes les courbes ainsi déterminées sont homothétiques par rapport au sommet du cône.

2° *Tous les plans variants aux points correspondants déterminés par une génératrice conique se coupent suivant une même droite, et ainsi leurs traces forment un système rayonnant. On obtiendra le centre en menant par* G *une parallèle à* nQ *et en la prolongeant jusqu'à sa rencontre avec la trace du plan tangent au conoïde en* N.

17. Revenant à notre objet essentiel, nous savons que deux surfaces gauches se raccordent quand elles ont deux plans tangents communs en deux points d'une génératrice, ainsi que la même surface directrice. Donc, si nous définissons une surface gauche par deux courbes et un plan directeur adopté pour plan de projection; comme nous savons en outre qu'un des plans tangents sera perpendiculaire au plan de projection, si le point de contact de ce plan était connu, un conoïde droit ayant une des deux courbes pour directrice, même plan directeur et pour axe la perpendiculaire au plan issue de ce point de contact, serait de raccordement, la deuxième directrice serait donc tangente au conoïde au point où elle coupe la génératrice commune. Or il résulte du n° 15 que, lorsque l'on connaît deux plans tangents sur une génératrice d'un conoïde droit, on peut toujours mener une droite QQ_1 passant par le pied de l'axe. En appliquant cette construction dans le cas présent, on pourra donc déterminer le pied de l'axe du conoïde, c'est-à-dire le point du contour apparent de la surface gauche, projection du point de contact du plan normal au plan tangent à l'infini situé sur la génératrice considérée.

L'analogie entre la méthode particulière actuellement et la méthode générale ci-dessus exposées est absolue. A ce point de vue on peut considérer, comme un annexe du théorème du n° 14, l'énoncé suivant :

Une surface gauche à plan directeur étant donnée et celui-ci choisi comme plan de projection, si l'on projette les points de contact M *et* M_1 *de deux plans tangents sur le plan directeur, après avoir déterminé les traces sur ce plan de ces deux plans tangents, et si par* m *et* m_1 *leurs projections respectives,*

on mène deux droites parallèles et de direction arbitraire, prolongées jusqu'à leur rencontre en I *et* I_1 *avec les traces, le point où la droite* II_1 *coupe la droite* mm_1 *est la projection du point de contact du plan tangent normal au plan directeur, c'est par conséquent le plan central.*

18. Si, au lieu d'une surface gauche à plan directeur, on avait, sur une surface gauche quelconque, une génératrice parallèle au plan de projection, la construction s'appliquerait à condition de s'être assuré à l'avance que le plan tangent est parallèle au plan horizontal. Lorsque la surface directrice sera connue, l'ambiguïté n'existera pas, mais il n'en sera plus de même si la position de la génératrice est définie par trois directrices, par exemple. Or la construction précédente permet de reconnaître le parallélisme au plan horizontal du plan tangent à l'infini lorsqu'il existe.

En effet, si l'axoïde défini ci-dessus se raccorde effectivement, ce qui n'a lieu que quand le plan tangent à l'infini est parallèle au plan horizontal, la troisième directrice a sa tangente comprise dans le plan tangent à l'axoïde en son point d'intersection avec la génératrice et, en particulier, la trace de cette droite appartient à la trace de ce plan. La construction toujours facile de l'axoïde donnera donc immédiatement la solution.

19. Les constructions relatives au conoïde permettent de calculer facilement le paramètre de distribution sur la génératrice d'une surface gauche.

Nous remarquerons en effet que, pouvant toujours construire un conoïde de raccordement à une surface gauche le long d'une de ses génératrices, il suffit de faire l'étude sur un conoïde.

Soient donc N et N_1 deux points d'un conoïde appartenant à la génératrice NB, en lesquels nous connaissons le plan tangent à la surface. Nous nous donnons l'axe et dans l'établissement des lignes auxiliaires *n*I, IG qui, d'après les constructions du n° **15**, servent à déterminer les plans tangents, nous supposons que la droite mobile *n*I est normale au plan axial de la génératrice NB. La droite fixe GI est ainsi la diagonale d'un rectangle *n*IRG, que nous pouvons construire, et si nous joignons RB, l'angle GBR $= \alpha$ sera l'angle plan du dièdre formé par le plan tangent à

la surface en N avec le plan axial choisi pour plan origine. Une construction analogue permettra de déterminer l'angle plan $GBR_1 = \alpha_1$ du plan tangent en N_1 avec le plan axial.

Ceci posé, on aura évidemment

$$\frac{\tang \alpha}{\tang \alpha_1} = \frac{nI}{n_1 I_1} = \frac{a}{a_1},$$

en posant $a = nG$ et $a_1 = n_1 G$ et en convenant de considérer ces longueurs comme positives ou négatives, suivant le sens dans lequel elles sont portées à partir du point G.

Appelons maintenant Δ la distance à l'origine du point de contact de la tangente pour laquelle $\alpha_1 = 45^\circ$ et par suite $\tang \alpha_1 = 1$; on aura l'expression bien connue

$$\tang \alpha = \frac{a}{\Delta}.$$

20. Sans nous arrêter à discuter cette formule, nous nous proposerons maintenant cette question :

Connaissant trois plans tangents à une surface gauche en trois points d'une génératrice, déterminer la position du point central.

Soient :

M, M_1, M_2 ces trois points énumérés dans leur ordre de succession sur la génératrice considérée ; on se donne

$$MM_1 = d_1,$$
$$MM_2 = d_2;$$

δ_1 l'angle des plans tangents en M et M_1 ;

δ_2 l'angle des plans tangents en M et M_2.

Désignons enfin par x la distance du point M au point central, par Δ le paramètre de distribution et enfin par δ l'angle du plan tangent en M avec le plan central.

On pourra écrire

$$\tang \delta = \frac{x}{\Delta},$$

$$\tang(\delta + \delta_1) = \frac{x + d_1}{\Delta},$$

$$\tang(\delta + \delta_2) = \frac{x + d_2}{\Delta};$$

de ces relations on tire

$$\operatorname{tang} \delta_1 = \frac{d_1 \times \Delta}{\Delta^2 + x(x + d_1)},$$

ou encore

$$(1) \qquad \Delta^2 + x(x + d_1) = d_1 \cot \delta_1 \times \Delta,$$

$$\operatorname{tang} \delta_2 = \frac{d_2 \times \Delta}{\Delta^2 + x(x + d_2)},$$

ou encore

$$(2) \qquad \Delta^2 + x(x + d_2) = d_2 \cot d_2 \times \Delta;$$

retranchant (1) de (2) membre à membre, on obtient finalement, en divisant le résultat par Δ,

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{x}{\Delta} = \frac{d_2 \cot \delta_2 - d_1 \cot \delta_1}{d_2 - d_1},$$

une construction graphique permettant de construire tang δ, cet angle sera par cela même déterminé, et, une fois connu, le plan central pourra être construit à son tour.

21. Cette détermination achève de nous permettre la construction du plan tangent aux surfaces gauches dans le seul cas où nous n'avions pas pu le résoudre sans un changement de plan de projection : c'est, on se le rappelle, dans l'hypothèse où, la génératrice considérée étant parallèle au plan de projection et déterminée de position par trois directrices quelconques, on a reconnu que son plan tangent à l'infini n'est pas parallèle au plan de projection, sans que pourtant sa position soit connue. Une fois δ déterminé, en effet, une rotation des trois plans tangents autour de la génératrice, égale à l'angle du plan central avec le plan normal au plan horizontal, nous ramènera à la construction du conoïde et nous n'aurons plus qu'à replacer les résultats dans leur position réelle par une rotation égale en sens inverse.

Les considérations qui précèdent ne sont pas les seuls résultats qu'on puisse tirer de l'étude des surfaces variantes ; nous espérons le montrer dans une prochaine Communication.

Sur les courbes unicursales; par M. G. HUMBERT.

(Séance du 4 février 1885.)

En coordonnées homogènes, une courbe unicursale de degré n est représentée par des équations de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = f_1(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n, \\ x_2 = f_2(t) = b_0 t^n + \ldots. \\ x_3 = f_3(t) = c_0 t^n + \ldots, \end{cases}$$

t étant un paramètre variable, $a_0, \ldots, c_0, \ldots$ des constantes.

Réciproquement, toute courbe représentée par des équations de la forme (1) est *en général* de degré n et de genre zéro; mais, dans certains cas, son degré peut être différent de n.

L'étude de ces cas particuliers est liée intimement à celle des courbes *adjointes* de la courbe proposée : on sait qu'on nomme courbe adjointe d'une courbe S toute courbe qui passe par les points doubles de S, ou, plus généralement, toute courbe qui a un point multiple d'ordre $p-1$ en tout point multiple d'ordre p de S.

Cela posé, les questions que nous nous proposons de traiter sont les suivantes :

1° *Étant donnée une courbe,* S, *de degré n, représentée par les équations* (1), *former l'équation de cette courbe et celles des courbes adjointes de degrés $n-2$ et $n-1$;*

2° *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe représentée par des équations de la forme* (1) *ne soit pas de degré n, et exprimer ces conditions en fonction des coefficients qui figurent dans les équations* (1).

I.

L'équation de la courbe S, représentée par les équations (1), s'obtient en éliminant t entre les deux équations

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{f_2(t)}{f_1(t)}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{f_3(t)}{f_1(t)}.$$

Nous arriverons à cette équation, et en même temps à celles des courbes adjointes de degrés $n-2$ et $n-1$ par le procédé suivant.

Les trois polynômes $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ sont linéairement indépendants, sinon la courbe S serait une droite, cas sans intérêt que nous excluons. On peut alors, d'une infinité de manières, former $(n-2)$ polynômes de degré n en t; $f_4(t), f_5(t), \ldots, f_{n+1}(t)$, tels qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène, identique en t, entre $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t), \ldots, f_{n+1}(t)$.

Soient ainsi posés

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n,\\
f_2(t) &= b_0 t^n + \ldots,\\
f_4(t) &= d_0 t^n + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_{n+1}(t) &= l_0 t^n + \ldots.
\end{aligned}$$

Résolvons ces équations par rapport aux $(n+1)$ quantités $t^n, t^{n+1}, \ldots, t_1, 1$ que nous désignerons respectivement par t_n, $t_{n-1}, \ldots, t_1, t_0$; nous aurons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
t_n &= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_{n+1} f_{n+1},\\
t_{n-1} &= \beta_1 f_1 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
t_1 &= \theta_1 f_1 + \ldots,\\
t_0 &= \lambda_1 f_1 + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Remarquons maintenant que les quantités $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_0$ sont liées par des relations du *second degré*, de la forme

$$t_i t_j = t_k t_l.$$

où l'on a

$$i + j = k + l,$$

car les deux produits considérés sont égaux à t^{i+j}.

Écrivons toutes ces relations en plaçant sur une même ligne horizontale les produits $t_i\, t_j$ pour lesquels la somme $i + j$ est la même; nous formons ainsi le Tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
t_n t_{n-2} = t_{n-1}^2, & & & \\
t_n t_{n-3} = t_{n-1} t_{n-2}, & & & \\
t_n t_{n-4} = t_{n-1} t_{n-3} = t_{n-2}^2, & & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & & & \\
t_n t_0 & = t_{n-1} t_1 & = t_{n-2} t_2 = \ldots, & \\
 & t_{n-1} t_0 & = t_{n-2} t_1 = \ldots, & \\
 & & & t_3 t_0 = t_2 t_1, \\
 & & & \quad t_2 t_0 = t_1^2.
\end{array}$$

Le nombre de ces relations se détermine comme il suit.

Le Tableau précédent renferme $2n - 3$ lignes horizontales; il contient une et une seule fois les produits $t_i t_j$ (i et j étant différents), sauf les produits $t_n t_{n-1}$ et $t_1\, t_0$ qui n'y figurent pas; il contient de même tous les carrés t_i^2, sauf t_0^2 et t_n^2. Il contient donc un nombre de termes égal à

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) - 4.$$

Le nombre des relations du second degré qui tient $t_n, \ldots, t_0$ et qui sont toutes écrites dans le Tableau est évidemment égal au nombre précédent diminué du nombre des lignes horizontales, puisque le nombre d'équations que contient une ligne est égal au nombre des produits $t_i t_j$ qu'elle renferme, diminué de un.

Les relations du second degré entre $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_1, t_0$ sont donc égales en nombre à

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) - 4 - (2n - 3),$$

c'est-à-dire à

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Observons de plus que les $\frac{n(n-1)}{2}$ premiers membres de ces re-

lations, mises sous la forme

$$
(3) \quad \begin{cases}
t_n t_{n-2} - t_{n-1}^2 = 0, \\
t_n t_{n-3} - t_{n-1} t_{n-2} = 0, \\
t_n t_{n-4} - t_{n-1} t_{n-3} = 0, \\
t_n t_{n-4} - t_{n-2}^2 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
t_2 t_0 - t_1^2 = 0,
\end{cases}
$$

sont linéairement indépendants par rapport aux quantités t_n, t_{n-1}, ..., t_1, t_0 : en d'autres termes, en combinant linéairement ces équations, on n'obtiendra jamais une identité en $t_n, t_{n-1}, \dots, t_0$.

Cela posé, remplaçons dans les équations (3) t_n, t_{n-1}, ... par leurs valeurs en fonction linéaire et homogène de $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$, tirées des relations (2), nous obtiendrons ainsi $\frac{n(n-1)}{2}$ relations du second degré en $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$, que nous appellerons, à cause de leur importance dans la théorie qui va suivre, les *équations fondamentales*.

Ces équations sont de la forme

$$
(4) \quad \begin{cases}
A_{44} f_4^2 + A_{45} f_4 f_5 + \dots + A_{n+1,n+1} f_{n+1}^2 + \Phi_1 f_4 + \Psi_1 f_5 + \dots + X_1 f_{n+1} = \Omega_1, \\
B_{44} f_4^2 + \dots\dots\dots\dots + \Phi_2 f_4 + \dots\dots\dots\dots = \Omega_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
L_{44} f_4^2 + L_{45} f_4 f_5 + \dots\dots\dots\dots + \Phi_{\frac{n(n-1)}{2}} f_4 + \dots\dots\dots\dots = \Omega_{\frac{n(n-1)}{2}},
\end{cases}
$$

$A_{44}, \dots, A_{n+1,n+1}$, B_{44}, L_{44}, ... sont des constantes;
Φ_1, Ψ_1, X_1, Φ_2, ..., $\Phi_{\frac{n(n-1)}{2}}$, ... des polynômes homogènes de degré un en f_1, f_2, f_3;
$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{\frac{n(n-1)}{2}}$ des polynômes homogènes de degré deux en f_1, f_2, f_3.

Quelles que soient les équations primitives (1) d'où l'on est parti (pourvu toutefois qu'elles ne représentent pas une droite), on arrivera par la méthode qu'on vient d'indiquer à $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de la forme (4), dont la considération va nous permettre de reconnaître si la courbe S est ou n'est pas de degré n. Mais, quel que soit le degré de cette courbe, c'est-à-dire quels que soient les coefficients $a_0, \dots, a_n$, b_0, ..., c_0, ... des équations (1),

les fonctions de f_1, f_2, f_3 qui figurent dans les relations (4) jouissent de propriétés *générales* que nous allons d'abord exposer.

Remarque. — Il résulte de ce qui a été dit à propos des relations (3) que les équations (4) sont linéairement indépendantes par rapport aux quantités $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$, c'est-à-dire qu'en les combinant linéairement on n'arrivera jamais à une relation identique en $f_1, f_2, \dots, f_n$.

II.

Si l'on élimine entre les équations (4) les quantités $f_4^2, f_4 f_5, \dots, f_{n+1}^2$, qui sont au nombre de $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 2$, on obtient en général $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} - (n-2)$, c'est-à-dire $n-1$ équations de la forme

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi_1 f_4 + \psi_1 f_5 + \dots + \chi_1 f_{n+1} = \omega_1, \\ \varphi_2 f_4 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \omega_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_{n-1} f_4 + \dots\dots\dots + \chi_{n-1} f_{n+1} = \omega_{n-1}, \end{cases}$$

où $\varphi, \psi, \dots, \chi$ sont des polynômes homogènes de degré un, en f_1, f_2, f_3, et ω des polynômes homogènes de degré deux en f_1, f_2, f_3.

Remarquons d'ailleurs que les équations (5) peuvent être en nombre supérieur à $n-1$ (cela arrivera par exemple si f_4^2 ne figure pas dans les relations fondamentales); mais elles ne peuvent être en nombre inférieur, car pour cela il faudrait que les équations (4) ne fussent pas linéairement indépendantes par rapport aux quantités $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n+1}$.

En résolvant $(n-2)$ des équations (5) par rapport aux $(n-2)$ quantités $f_4, f_5, \dots, f_{n+1}$ qui y entrent au premier degré, on obtient des relations telles que

$$(6)\qquad \Delta f_4 = F_4;\quad \Delta f_5 = F_5;\quad \dots,\quad \Delta f_{n+1} = F_{n+1},$$

où Δ est un polynôme de degré $n-2$ en f_1, f_2, f_3; $F_4, \dots, F_{n+1}$ des polynômes de degré $n-1$ en f_1, f_2, f_3.

On a par exemple, si les équations résolues sont les $(n-2)$

premières des équations (5),

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \dots & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-2} & \dots & \dots & \chi_{n-2} \end{vmatrix}, \quad F_4 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \psi_1 & \dots & \chi_1 \\ \omega_2 & \psi_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n-2} & \psi_{n-2} & \dots & \chi_{n-2} \end{vmatrix} \dots$$

Remplaçons dans les polynômes Δ et F, f_1, f_2, f_3 par x_1, x_2, x_3, et considérons les courbes représentées par les équations

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Elles jouissent d'une propriété importante.

Théorème. — *Les courbes représentées par les équations* $\Delta = 0$, $F = 0$ *sont des courbes adjointes de la courbe* S, *représentée par les équations* (1).

Soit, en effet, A un point multiple de S, un point triple par exemple. Désignons par α, β, γ les trois valeurs correspondantes du paramètre t; on aura, en les supposant différentes,

$$(7) \qquad \begin{cases} f_1(\beta) = \lambda f_1(\alpha), & f_1(\gamma) = \mu f_1(\alpha), \\ f_2(\beta) = \lambda f_2(\alpha), & f_2(\gamma) = \mu f_2(\alpha), \\ f_3(\beta) = \lambda f_3(\alpha), & f_3(\gamma) = \mu f_3(\alpha), \end{cases}$$

λ et μ étant deux constantes. Il s'agit de prouver que les courbes $\Delta = 0$, $F = 0$ passent par A et y ont un point double.

Considérons à cet effet les $(n-2)$ équations (5) que nous avons résolues pour obtenir les équations (6)

$$(5) \qquad \varphi_i f_4 + \psi_i f_5 + \dots + \chi_i f_{n+1} = \omega_i \quad [i = 1, 2, \dots, (n-2)],$$

et posons

$$\mathfrak{F}_i(t) = \varphi_i(\alpha) f_4(t) + \psi_i(\alpha) f_5(t) + \dots + \chi_i(\alpha) f_{n+1}(t).$$

$\varphi_i(\alpha) \dots$ désigne ce que devient la fonction $\varphi_i[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$ pour $t = \alpha$.

On a évidemment

$$\mathfrak{F}_i(\alpha) = \varphi_i(\alpha) f_4(\alpha) + \dots + \chi_i(\alpha) f_{n+1}(\alpha) = \omega_i(\alpha)$$

en vertu de (5).

On a également

$$\mathfrak{F}_i(\beta) = \varphi_i(\alpha) f_4(\beta) + \dots.$$

Or φ_i est un polynôme du premier degré en $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$; ω_i un polynôme du deuxième degré en $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$.

On a donc, en vertu de (7),

$$\varphi_i(\beta) = \lambda\varphi_i(\alpha), \quad \omega_i(\beta) = \lambda^2\omega_i(\alpha).$$

Par suite

$$\mathfrak{F}_i(\beta) = \frac{1}{\lambda}[\varphi_i(\beta)f_1(\beta) + \ldots] = \frac{1}{\lambda}\omega_i(\beta) = \lambda\omega_i(\alpha).$$

Donc enfin il vient

$$\mathfrak{F}_i(\beta) = \lambda\mathfrak{F}_i(\alpha), \tag{8}$$

et de même

$$\mathfrak{F}_i(\gamma) = \mu\mathfrak{F}_i(\alpha).$$

Si donc on pose

$$\begin{aligned}
P_i(t) &= \mathfrak{F}_i(t)f_1(\alpha) - \mathfrak{F}_1(\alpha)f_1(t), \quad [i = 1, 2, \ldots, (n-2)];\\
P_{n-1}(t) &= f_2(t)f_1(\alpha) - f_2(\alpha)f_1(t),\\
P_n(t) &= f_3(t)f_1(\alpha) - f_3(\alpha)f_1(t),
\end{aligned}$$

les n polynômes $P_1, \ldots, P_n$ de degré n en t s'annulent pour $t = \alpha$, $t = \beta$, $t = \gamma$ en vertu des relations (7) et (8); ils s'expriment par suite en fonction linéaire et homogène de $(n-2)$ polynômes de degré n en t; en d'autres termes, ils sont liés par deux relations linéaires et homogènes de la forme

$$\left\{\begin{aligned}
&m_1P_1 + m_2P_2 + \ldots + m_{n-1}P_{n-1} + m_nP_n = 0,\\
&p_1P_1 + p_2P_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

où $m_1, \ldots, p_1 \ldots$ sont des constantes.

Ces deux relations sont identiques en t, c'est-à-dire identiques par rapport aux quantités $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_0$ ou, ce qui revient au même, par rapport à $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$.

Or f_2 ne figure que dans P_{n-1}; f_3 que dans P_n. On a donc

$$m_{n-1} = m_n = p_{n-1} = p_n = 0.$$

Écrivons maintenant que $f_1, f_4, \ldots, f_{n+1}$ disparaissent dans la première relation (9); il vient, en remarquant que $\mathfrak{F}_1(\alpha) = \omega_1(\alpha)$,

$$\left\{\begin{aligned}
&m_1\omega_1(\alpha) + m_2\omega_2(\alpha) + \ldots + m_{n-2}\omega_{n-2}(\alpha) = 0,\\
&m_1\varphi_1(\alpha) + m_2\varphi_2(\alpha) + \ldots + m_{n-2}\varphi_{n-2}(\alpha) = 0,\\
&m_1\psi_1(\alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&m_1\chi_1(\alpha) + m_2\chi_2(\alpha) + \ldots + m_{n-2}\chi_{n-2}(\alpha) = 0.
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

On a des équations analogues, en remplaçant $m_1, \ldots$ par $p_1, \ldots$. On en conclut aisément que le déterminant d'ordre $n-2$

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha) & \psi_1(\alpha) & \ldots & \chi_1(\alpha) \\ \varphi_2(\alpha) & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_{n-2}(\alpha) & \ldots\ldots & \ldots & \chi_{n-2}(\alpha) \end{vmatrix}$$

est nul, ainsi que tous ses mineurs d'ordre $(n-3)$, qu'il en est de même des déterminants obtenus en remplaçant une colonne du précédent par la colonne

$$\begin{matrix} \omega_1(\alpha), \\ \omega_2(\alpha), \\ \ldots\ldots, \\ \omega_{n-2}(\alpha), \end{matrix}$$

et que les mineurs d'ordre $n-3$ des précédents sont également nuls.

Ces résultats suffisent pour démontrer le théorème que nous voulons établir.

En effet, la relation $\Delta(\alpha) = 0$ montre que la courbe $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ passe par le point triple A de la courbe S. Je dis qu'elle y a un point double. En effet, les constantes $m_1, m_2, \ldots, m_{n-2}$, qui figurent dans les relations (9) et (10), ne sont pas toutes nulles à la fois, d'après l'hypothèse même qui a permis d'écrire les équations (9). Supposons que m_1 ne soit pas nul. On peut écrire

$$m_1 \Delta = \begin{vmatrix} m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_{n-2}\varphi_{n-2} & m_1\psi_1 + m_2\psi_2 + \ldots & \ldots & m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \ldots \\ \varphi_2 & \psi_2 & \ldots & \chi_2 \\ \varphi_3 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-2} & \psi_{n-2} & \ldots & \chi_{n-2} \end{vmatrix}$$

ou, en ordonnant par rapport aux éléments de la première ligne,

$$m_1 \Delta(x_1, x_2, x_3) = \Sigma R(x_1, x_2, x_3)[m_1 \varphi_1(x_1, x_2, x_3) + m_2 \varphi_2(x_1, x_2, x_3) + \ldots].$$

Or la courbe

$$m_1 \varphi_2 + m_3 \varphi_2 + \ldots = 0$$

est une droite qui passe par le point A, puisque, d'après les équations (10), on a

$$m_1 \varphi_1(\alpha) + m_2 \varphi_2(\alpha) + \ldots = 0;$$

la courbe $R = 0$, de degré $n - 3$, passe également par ce point, puisque la quantité $R[f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha)]$ est un des déterminants mineurs d'ordre $(n - 3)$ du déterminant $\Delta(\alpha)$, et est nulle, d'après ce qui précède.

Il en résulte que la courbe $\Delta = 0$ passe par A et y a un point double.

La démonstration est la même pour les courbes F. C. Q. F. D.

Si, au point A, deux branches de S avaient même tangente, deux des quantités α, β, γ, les deux premières, par exemple, seraient égales. On aurait en ce cas, en désignant par $f'(t)$ la dérivée de $f(t)$,

$$f'_1(\alpha) = \lambda f_1(\alpha),$$
$$f'_2(\alpha) = \lambda f_2(\alpha),$$
$$f'_3(\alpha) = \lambda f_3(\alpha).$$

On donnerait du théorème proposé une démonstration analogue à la précédente, en montrant que les fonctions $P_1, \ldots, P_n$ s'annulent pour $t = \gamma$, et ont la racine double α.

III.

Avant d'entrer dans des explications plus détaillées au sujet des courbes adjointes et d'appliquer les considérations précédentes à la courbe S, représentée par les équations (1) et supposée de degré n, nous chercherons dans quels cas cette courbe peut être de degré inférieur à n.

La courbe S

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t)$$

est coupée par la droite $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ en des points dont les arguments vérifient l'équation

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t) = 0. \tag{11}$$

Cette équation a n racines; la courbe coupe donc S en n points, et cette dernière courbe est, en général, de degré n. Il n'y a que deux cas d'exception :

1° A une ou à plusieurs des racines de l'équation (1) ne correspond aucun point de S; en d'autres termes, les fonctions f_1, f_2, f_3 s'annulent pour la valeur de t considérée. En ce cas, $f_1(t)$,

$f_2(t)$, $f_3(t)$ ont k zéros communs $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, et en divisant ces trois polynômes par le produit $(t-\theta_1)(t-\theta_2)\ldots(t-\theta_k)$, on obtient des quotients entiers f'_1, f'_2, f'_3 de degré $n-k$. La courbe

$$x_1 = f'_1(t), \quad x_2 = f'_2(t), \quad x_3 = f'_3(t)$$

est évidemment identique à la courbe S, et son degré est $n-k$, en général.

2° A plusieurs des racines de l'équation (11) correspond le même point de S; en d'autres termes, t et u étant deux de ces racines, on a

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{f_1(u)}{f_1(t)} = \dfrac{f_2(u)}{f_2(t)} = \dfrac{f_3(u)}{f_3(t)} \\ \text{avec} \\ a_1 f_1(u) + a_2 f_2(u) + a_3 f_3(u) = 0, \\ a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t) = 0. \end{cases}$$

Les équations (12) doivent avoir lieu, quels que soient a_1, a_2, a_3; par suite, quel que soit t, on doit pouvoir trouver une valeur u, différente de t, telle que les équations

$$\frac{f_1(u)}{f_1(t)} = \frac{f_2(u)}{f_2(t)} = \frac{f_3(u)}{f_3(t)}$$

soient satisfaites.

En ce cas, à un point de S correspondent plusieurs valeurs du paramètre t, et la courbe est une courbe de degré inférieur à n, comptée plusieurs fois.

Supposons qu'on ne se trouve dans aucun de ces deux cas d'exception : la courbe S sera de degré n.

Formons les équations (4) et les équations (5); ces dernières sont de la forme

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi_1 f_4 + \psi_1 f_5 + \ldots + \chi_1 f_{n+1} = \omega_1, \\ \varphi_2 f_4 + \ldots\ldots\ldots + \chi_2 f_{n+1} = \omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n-1} f_4 + \ldots\ldots\ldots + \chi_{n-1} f_{n+1} = \omega_{n-1}. \end{cases}$$

Elles sont au nombre de $(n-1)$ au moins, comme nous l'avons vu plus haut.

Posons

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \psi_2 & \cdots & \chi_2 \\ \varphi_3 & \cdot\cdot & \cdots & \chi_3 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \varphi_{n-1} & \cdot\cdot & \cdots & \chi_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \cdots & \varphi_1 \\ \varphi_3 & \cdot\cdot & \cdots & \chi_3 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \varphi_{n-1} & \cdot\cdot & \cdots & \chi_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \cdots & \chi_1 \\ \varphi_2 & \cdot\cdot & \cdots & \chi_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \varphi_{n-2} & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Les courbes $\Delta_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \ldots, \Delta_{n-1}(x_1, x_2, x_3) = 0$, de degré $n - 2$, sont, comme nous l'avons vu, des courbes adjointes de S. Nous allons démontrer qu'aucune des fonctions $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ n'est identiquement nulle.

Remarquons d'abord que, si la fonction Δ_1, par exemple, était identiquement nulle, elle le resterait si l'on y remplaçait f_1, f_2, f_3 par des fonctions linéaires et homogènes de f'_1, f'_2, f'_3, telles que

$$(13)\qquad \begin{cases} f_1 = a_1 f'_1 + a_2 f'_2 + a_3 f'_3, \\ f_2 = b_1 f'_1 + \ldots, \\ f_3 = c_1 f'_1 + \ldots. \end{cases}$$

Le déterminant de cette substitution étant supposé différent de zéro, on aura

$$f'_1 = a'_1 f_1 + a'_2 f_2 + a'_3 f_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

f'_1, f'_2, f'_3 sont des polynômes de degré n en t; si $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ n'ont aucun zéro commun, ce que nous supposerons puisque S est de degré n, on pourra choisir les constantes $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$, de façon que les fonctions $f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)$, prises deux à deux, n'aient aucun zéro commun.

Supposons maintenant que Δ_1 soit nul identiquement, et remplaçons, dans les équations (5), f_1, f_2 et f_3 par leurs valeurs en

fonction de f'_1, f'_2, f'_3. Ces fonctions donnent

$$\Delta'_1 f_4 = F'_4,$$

en désignant par Δ'_1 et F'_4 ce que deviennent, après la substitution (13), les déterminants Δ_1 et F_4, étant posé

$$F_4 = \begin{vmatrix} \omega_2 & \psi_2 & \dots & \chi_2 \\ \omega_3 & \psi_3 & \dots & \chi_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n-1} & \dots & \dots & \chi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

La relation précédente, où Δ'_1 est nul identiquement, entraîne la relation

$$F'_4 = 0 \quad \text{ou} \quad F_4 = 0.$$

Cette dernière équation, de degré $n-1$ en f_1, f_2, f_3, doit être une identité par rapport à f_1, f_2, f_3, sinon l'équation $F_4 = 0$ serait l'équation de la courbe S, ce qui est impossible, puisque cette courbe est de degré n.

De même les déterminants obtenus en remplaçant une colonne de Δ_1 par la colonne

$$\omega_2,\\ \omega_3,\\ \dots,\\ \omega_{n-2}$$

seront identiquement nuls.

Écrivons les équations (5) en remplaçant f_1, f_2, f_3 par leurs valeurs f'_1, f'_2, f'_3 :

$$(5\ bis)\qquad \begin{cases} \varphi'_1 f'_4 + \psi'_1 f_5 + \dots + \chi'_1 f_{n+1} = \omega'_2, \\ \varphi'_2 f_4 + \psi'_2 f_5 + \dots + \chi'_2 f_{n+1} = \omega'_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi'_{n-1} f_4 + \dots\dots\dots + \chi'_{n-1} f_{n+1} = \omega'_{n-1}. \end{cases}$$

Les déterminants $\Delta'_1, F'_4, \dots$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \varphi'_2 & \psi'_2 & \dots & \chi'_2 \\ \varphi'_3 & \dots & \dots & \chi'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi'_{n-1} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \omega'_2 & \psi'_2 & \dots & \chi'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega'_{n-1} & \dots & \dots & \chi'_{n-1} \end{vmatrix}, \dots,$$

étant identiquement nuls, les coefficients de la plus haute puissance de f'_1, dans chacun d'eux, seront nuls. Il en résulte aisément qu'on

pourra, en combinant linéairement les $(n-2)$ dernières des équations (5 *bis*), faire disparaître f'_1 des coefficients de $f_4, f_5, \ldots, f_{n+1}$ et $f_1'^2$ du second membre de la relation obtenue. Cette relation sera donc de la forme

$$\begin{aligned} &f_4(\alpha_4 f'_2 + \beta_4 f'_2) + f_5(\alpha_5 f'_2 + \beta_5 f'_3) + \ldots \\ &\quad = f'_2(\lambda_2 f'_1 + \mu_2 f'_2 + \nu_2 f'_3) + f'_3(\lambda_3 f'_1 + \mu_3 f'_2 + \nu_3 f'_3) \end{aligned}$$

ou

$$(14)\quad f'_2(A_1 f'_1 + A_2 f'_2 + A_3 f'_3 + A_4 f_4 + \ldots) = f'_3(B_1 f'_1 + \ldots + B_4 f_4 + \ldots).$$

Or, par hypothèse, les polynômes, de degré n en t, f'_2 et f'_3, n'ont aucun zéro commun; il en résulte que f'_2 divise le polynôme $B_1 f'_1 + \ldots$, et, comme ce dernier est de degré n, il est, à un facteur près, identique à f'_2. De même, $A_1 f'_1 + \ldots$ est, à un facteur près, identique à f'_3. Il en résulte que l'équation (14) se réduit à

$$M f'_2 f'_3 = 0,$$

M étant une constante, qui est nulle nécessairement; par conséquent, on obtient une identité en combinant linéairement les équations (5 *bis*), ce qui est impossible, d'après ce qui a été dit plus haut. On en conclut que l'hypothèse faite est inadmissible, c'est-à-dire que Δ_1 n'est jamais identiquement nul.

On démontre de même :

1° Qu'il n'existe aucune relation identique de la forme

$$\alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \Delta_{n-1} = 0;$$

2° Que les équations (5) ne sont pas en nombre supérieur à $(n-1)$.

Remarquons enfin que les équations (5) renferment linéairement les $(n-2)$ quantités $f_4, \ldots, f_{n+1}$; pour qu'elles soient compatibles, il faut qu'on ait

$$S = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \ldots & \chi_1 & \omega_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \ldots & \ldots & \omega_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \omega_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation est de degré n en f_1, f_2, f_3; on démontre, comme plus haut, que le déterminant S n'est pas identiquement nul en f_1, f_2, f_3; et, par suite, $S = 0$ est l'équation de la courbe considérée.

IV.

Les résultats des deux paragraphes précédents nous permettent de résoudre la première question posée au commencement de ce travail :

Étant donnée une courbe S, *de degré* n, *représentée par des équations de la forme* (1), *trouver son équation et celles des courbes adjointes de degrés* $n-2$ *et* $n-1$.

Remarquons d'abord que la courbe S est nécessairement unicursale.

En effet, les équations (5) permettent d'exprimer $f_4(t), f_5(t), \ldots, f_{n+1}(t)$ en fonction rationnelle de $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, c'est-à-dire des coordonnées x_1, x_2, x_3 d'un point de S. Par suite, tout polynôme entier de degré n en t est fonction rationnelle de x_1, x_2, x_3. En particulier, on a

$$t = \text{fonction rationnelle de } x_1, x_2, x_3.$$

Posons, $A_1, B_1, \ldots$ étant des constantes,

$$x'_1 = A_1 t + B_1,$$
$$x'_2 = A_2 t + B_2,$$
$$x'_3 = A_3 t + B_3.$$

Le point (x'_1, x'_2, x'_3) décrit une droite quand t varie. D'après ce qui précède, on voit que x'_1, x'_2, x'_3 seront des fonctions rationnelles de x_1, x_2, x_3. Inversement, x_1, x_2, x_3, étant des fonctions rationnelles de t, seront fonctions rationnelles de x'_1, x'_2, x'_3. Les courbes décrites par les points (x_1, x_2, x_3) et (x'_1, x'_2, x'_3) se correspondent donc par une transformation unidéterminative et, par conséquent, sont du même genre.

La courbe S est donc du genre zéro.

Son équation est $S = 0$, S désignant le déterminant du paragraphe précédent.

Cela posé, supposons, pour simplifier le langage, que la courbe S n'ait comme points multiples que des points doubles ; elle en aura $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Les courbes adjointes de degré $(n-2)$ passent par ces points, et, par suite, leur équation générale sera de la forme

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_{n-1} C_{n-1} = 0,$$

$C_1 = 0, \ldots, C_2 = 0, C_{n-1} = 0$ étant des courbes adjointes, telles que les fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ soient linéairement indépendantes.

Or nous connaissons $(n-1)$ courbes adjointes

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{n-1} = 0,$$

telles que les fonctions $\Delta_1, \ldots$ soient linéairement indépendantes; il en résulte que l'équation générale des courbes adjointes de degré $(n-2)$ sera

$$\alpha_1 \Delta_2 + \alpha_3 \Delta_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \Delta_{p-1} = 0,$$

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ étant des polynômes que nous avons appris à former plus haut.

On formerait de même l'équation d'une courbe adjointe de degré $n-1$, à l'aide des polynômes que nous avons appelés F au § II.

Nous ferons une observation relative aux courbes représentées par les équations $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Nous avons trouvé plus haut les relations

$$(6) \qquad \Delta f_4 = F_4, \quad \Delta f_5 = F_5, \quad \ldots, \quad \Delta f_{n+1} = F_{n+1},$$

où Δ est un polynôme de degré $n-2$, tel que la courbe

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

est une courbe adjointe de S, que l'on peut supposer quelconque.

Les courbes S et Δ ont $(n-1)(n-2)$ intersections aux points multiples de S, et, par suite, elles ont encore $n-2$ points communs, différents des points multiples. Ces $(n-2)$ points sont d'ailleurs arbitraires, puisque, par $(n-2)$ points et par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles de S, on peut toujours faire passer une courbe Δ, de degré $n-2$.

Cela posé, les équations (6) montrent immédiatement que les

courbes adjointes $F_4 = 0, \ldots, F_{n+1} = 0$ passent par les $(n-2)$ points communs à Δ et à S.

On déduit de là une conséquence relative à la transformation unidéterminative qui lie deux courbes unicursales de degré n, S et S'.

Les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 des points de S', étant égales à des polynômes d'ordre n en t, sont des fonctions linéaires et homogènes de $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_{n+1}(t)$; on a ainsi

$$x'_i = a_i f_1 + b_i f_2 + c_i f_3 + d_i f_4 + \ldots + l_i f_{n+1}$$

ou, en vertu de (6),

$$\Delta x'_i = (a_i f_1 + b_i f_2 + c_i f_3)\Delta + d_i F_4 + \ldots + l_i F_{n+1}.$$

Or $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ sont les coordonnées x_1, x_2, x_3 d'un point de S; on a ainsi, en supprimant dans le premier membre de la relation précédente le facteur Δ,

$$x'_i = (a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3)\Delta(x_1, x_2, x_3) + d_i F_4(x_1, x_2, x_3) + \ldots.$$

En d'autres termes, S et S' étant deux courbes unicursales de degré n, les coordonnées d'un point de S' sont liées aux coordonnées d'un point de S par les relations

$$x'_i = \psi_i(x_1, x_2, x_3),$$

ψ_i étant un polynôme de degré $n-1$, et les courbes $\psi_i = 0$ des courbes adjointes de S, passant par $(n-2)$ points pris arbitrairement sur S.

(*A suivre.*)

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

10473. Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XIII. — N° 3.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1885

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

Sur la chaînette sphérique; par M. Appell.

(Séance du 4 février 1885.)

M. Hermite a montré (*Journal de Crelle,* t. 85) que les coordonnées rectangulaires de l'extrémité d'un pendule sphérique peuvent être exprimées en fonction uniforme de temps à l'aide des fonctions Θ. J'ai remarqué qu'une méthode, analogue à celle de M. Hermite, peut être appliquée à la *chaînette sphérique,* c'est-à-dire à la courbe d'équilibre d'un fil homogème pesant posé sur la surface d'une sphère sur laquelle il peut glisser sans frottement.

Prenons pour origine le centre de la sphère, pour axe des z la verticale dirigée vers le bas; appelons a le rayon de la sphère, p le poids de l'unité de longueur du fil. Les équations d'équilibre seront les suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)+\mathrm{N}\frac{x}{a}=0,\\ &\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)+\mathrm{N}\frac{y}{a}=0,\\ &\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right)+\mathrm{N}\frac{z}{a}+p=0,\end{aligned}\right.$$

avec la condition

$$(1')\qquad x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Dans ces équations, T désigne la tension du fil au point (x, y, z) et $\mathrm{N}\,ds$ la réaction normale de la sphère sur l'élément de longueur ds.

On déduit immédiatement de ces équations

$$d\mathrm{T}+p\,dz=0,$$

d'où

$$(2)\qquad \mathrm{T}=p(h-z),$$

h désignant une constante arbitraire. En éliminant N entre les deux premières des équations (1), on obtient l'équation

$$d\left[\mathrm{T}\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)\right]=0,$$

qui donne

$$T(x\,dy - y\,dx) = C\,ds,$$

ou, en prenant des coordonnées polaires r et θ dans le plan xOy,

(3) $$T\,r^2\,d\theta = C\,ds,$$

C étant une constante arbitraire.

Remplaçons, dans cette équation, T par sa valeur (2) et faisons, pour abréger,

$$C = Ap;$$

nous avons

$$(h - z)\,r^2\,d\theta = A\,ds,$$

qui est l'équation différentielle de la figure d'équilibre. Pour intégrer cette équation, élevons les deux membres au carré et remarquons que

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2 = \frac{a^2\,dz^2}{r^2} + r^2\,d\theta^2,$$

à cause de la relation

$$r = \sqrt{a^2 - z^2}.$$

Nous avons

$$r^4\,d\theta^2[(h - z)^2 r^2 - A^2] = A^2 a^2\,dz^2,$$

d'où

(4) $$d\theta = \frac{A\,a\,dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(h - z)^2(a^2 - z^2) - A^2}};$$

on a ainsi θ en z par une quadrature.

Enfin, pour terminer l'exposition des formules déjà connues, calculons la réaction N. Il suffira, pour cela, de multiplier la première des équations (1) par x, la deuxième par y, la troisième par z et de les ajouter en remarquant que l'équation (1′) donne, par la différentiation,

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$x\frac{d^2x}{ds^2} + y\frac{d^2y}{ds^2} + z\frac{d^2z}{ds^2} = -1;$$

nous avons ainsi

$$Na + pz - T = 0,$$

d'où, d'après la valeur (2) de T,

(5) $$N = \frac{p}{a}(h - 2z).$$

Ces formules résolvent complètement la question de Mécanique; voici maintenant comment on pourra exprimer les coordonnées x, y, z en fonction uniforme d'un paramètre u.

Posons

(6) $$du = \frac{a\,dz}{\sqrt{(h-z)^2(a^2-z^2)-A^2}},$$

d'où

(6') $$d\theta = \frac{A\,du}{a^2-z^2};$$

la formule (3) nous donnera, si nous y remplaçons $d\theta$ par cette valeur (6') et C par Ap,

(7) $$\frac{du}{ds} = \frac{p}{T}.$$

Cette relation (7) nous montre que l'on a

$$T\frac{dx}{ds} = p\frac{dx}{du},$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = \frac{p^2}{T}\frac{d^2x}{du^2}.$$

La première des équations (1) peut donc s'écrire

$$p^2\frac{d^2x}{du^2} + TN\frac{x}{a} = 0$$

et, en remplaçant T et N par leurs valeurs (2) et (5),

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{(h-z)(h-2z)}{a^2}x = 0.$$

Le même calcul fournira pour y la même équation; donc x et y vérifient l'équation linéaire en V,

(8) $$\frac{d^2V}{du^2} + \frac{(h-z)(h-2z)}{a^2}V = 0.$$

L'équation (6) donne z en fonction uniforme doublement périodique de u,

$$z = \varphi(u);$$

d'après cela, l'équation linéaire (8) est à coefficients doublement périodiques en u. On peut voir directement, d'après les principes posés par M. Fuchs, que l'intégrale générale de cette équation est uniforme en u; donc, d'après un théorème de M. Picard, l'inté-

grale générale V, c'est-à-dire x et y, pourra s'exprimer par des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce. Mais il est facile d'exprimer x et y en fonction de u par des quadratures. On a, en effet, d'après (6'),

$$\theta = A \int \frac{du}{a^2 - z^2}; \tag{9}$$

d'ailleurs,

$$\left\{\begin{aligned} x + yi &= re^{\theta i} = \sqrt{a^2 - z^2}\, e^{Ai\int \frac{du}{a^2 - z^2}}, \\ x - yi &= re^{-\theta i} = \sqrt{a^2 - z^2}\, e^{-Ai\int \frac{du}{a^2 - z^2}}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

En effectuant les quadratures indiquées, on trouvera

$$x + yi, \quad x - yi,$$

exprimés en u par des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce. C'est ce que nous allons montrer rapidement.

L'équation (6) donne, en faisant l'inversion,

$$z = \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction doublement périodique du second ordre dont je désignerai les périodes par $2K$, $2iK'$. Dans un parallélogramme des périodes, cette fonction admet deux infinis que j'appellerai α et β; soit u_1 une racine de l'équation $z = a$ ou

$$\varphi(u) - a = 0;$$

cette équation admettra une deuxième racine

$$u_1' = \alpha + \beta - u_1;$$

et comme, d'après l'équation (6), on a

$$a\varphi'(u) = \sqrt{(h - z)^2(a^2 - z^2) - A^2},$$

on voit que

$$\varphi'(u_1) = \frac{iA}{a}, \quad \varphi'(u_1') = -\frac{iA}{a}, \tag{11}$$

car $a^2 - z^2$ s'annule pour $u = u_1$, $u = u_1'$.

Soit de même u_2 une racine de l'équation

$$z = -a, \quad \varphi(u) + a = 0;$$

cette équation admettra une deuxième racine

$$u_2' = \alpha + \beta - u_2,$$

et l'on aura encore

$$(11') \qquad \varphi'(u_2) = \frac{iA}{a}, \quad \varphi'(u'_2) = -\frac{iA}{a}.$$

On a donc, en désignant par P et Q deux *constantes*,

$$(12) \quad \begin{cases} a - z = P\dfrac{H(u-u_1)H(u-u'_1)}{H(u-\alpha)H(u-\beta)}, \\ a + z = Q\dfrac{H(u-u_2)H(u-u'_2)}{H(u-\alpha)H(u-\beta)}; \end{cases}$$

ces constantes pourraient être déterminées à l'aide de l'une ou de l'autre des équations (11) ou (11').

Pour calculer θ en fonction de u, nous nous servirons de l'équation (9). On a

$$\frac{A}{a^2 - z^2} = \frac{A}{2a}\left(\frac{1}{a-z} + \frac{1}{a+z}\right).$$

Or, d'après la formule de décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{a-z} = -\frac{Z(u-u_1)}{\varphi'(u_1)} + \frac{Z(u-u'_1)}{\varphi'(u'_1)} + B,$$

$$\frac{1}{a+z} = \frac{Z(u-u_2)}{\varphi'(u_2)} + \frac{Z(u-u'_2)}{\varphi'(u'_2)} + D;$$

donc, d'après les équations (11) et (11'),

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{A}{a^2 - z^2} = \dfrac{i}{2}[-Z(u-u_1) + Z(u-u'_1) \\ \qquad\qquad + Z(u-u_2) - Z(u-u'_2) + G], \end{cases}$$

G désignant une constante que l'on peut déterminer en remarquant que les deux membres de l'équation (13) doivent s'annuler pour $z = \alpha$.

L'équation (9) donne alors

$$\theta = \theta_0 + \frac{i}{2}\left[\log\frac{H(u-u'_1)H(u-u_2)}{H(u-u_1)H(u-u'_2)} + Gu\right],$$

et

$$(14) \qquad e^{i\theta} = e^{i\theta_0 - \frac{G}{2}u}\sqrt{\frac{H(u-u_1)H(u-u'_2)}{H(u-u'_1)H(u-u_2)}}.$$

En remplaçant, dans les formules (10),

$$\sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{(a-z)(a+z)} \quad \text{et} \quad e^{\theta i}$$

par leurs valeurs (12) et (14), on a enfin

$$(15)\quad \begin{cases} x+yi = \mathrm{R}e^{\frac{\mathrm{G}u}{2}}\dfrac{\mathrm{H}(u-u_1)\mathrm{H}(u-u'_2)}{\mathrm{H}(u-\alpha)\mathrm{H}(u-\beta)}, \\ x-yi = \mathrm{R}_1 e^{-\frac{\mathrm{G}u}{2}}\dfrac{\mathrm{H}(u-u_2)\mathrm{H}(u-u'_1)}{\mathrm{H}(u-\alpha)\mathrm{H}(u-\beta)}, \end{cases}$$

R et R_1 désignant les constantes

$$\sqrt{\mathrm{PQ}}\,e^{i\theta_0},\quad \sqrt{\mathrm{PQ}}\,e^{-i\theta_0}.$$

Nous avons ainsi

$$x+yi \quad \text{et} \quad x-yi$$

en fonction uniforme de u. Calculons, pour terminer, l'arc s en fonction de u. On a, d'après (7),

$$ds = \frac{\mathrm{T}}{p}\,du = (h-z)\,du.$$

Or la décomposition en éléments simples donne encore

$$h-z = \mathrm{M}[\mathrm{Z}(u-\alpha)-\mathrm{Z}(u-\beta)]+\mathrm{S},$$

M étant le résidu de $-z$ relatif à l'infini $u=\alpha$ et S une constante,

$$\mathrm{M} = -\lim(u-\alpha)z = -\lim\frac{u-\alpha}{\frac{1}{z}}$$

pour $u=\alpha$, c'est-à-dire

$$\mathrm{M} = \lim\frac{z^2}{z'}$$

pour $z=\infty$.

Comme

$$z' = \frac{\sqrt{(h-z)^2(a^2-z^2)-\mathrm{A}^2}}{a},$$

on voit que

$$\mathrm{M} = -ai.$$

Donc

$$h-z = ai[\mathrm{Z}(u-\beta)-\mathrm{Z}(u-\alpha)]+\mathrm{S}$$

et

$$(16)\quad s = ai\log\frac{\mathrm{H}(u-\beta)}{\mathrm{H}(u-\alpha)}+\mathrm{S}u+\text{const.}$$

Je me propose, dans une autre Communication, de déterminer la fonction $\varphi(u)$ et d'achever les calculs de façon à exprimer les éléments de la courbe en quantités réelles et à discuter la question de Mécanique.

M. Rouché demande la parole à propos d'une Note qu'il vient de lire dans le dernier fascicule du *Bulletin* de la Société (séance du 12 novembre 1885), et où il est question de l'application à un problème d'ombres d'une propriété de deux quadriques inscrites dans une troisième. M. Rouché fait observer que cette application n'est pas nouvelle, qu'il la donne régulièrement sous la même forme dans ses Leçons depuis 1862, et qu'enfin elle se trouve depuis quelques années imprimée dans plusieurs Ouvrages très répandus et enseignée dans tous les Cours de Mathématiques spéciales de Paris.

M. Lebon, à qui nous avons communiqué la Note précédente, nous écrit ce qui suit : « Comme la Note que vous voulez bien me communiquer a été commentée en séance publique sans que j'eusse été averti, il est naturel qu'elle paraisse au *Bulletin* sans que j'y réponde à présent. Mais, dans le prochain numéro du *Bulletin,* je répondrai aux attaques dont mon article est l'objet. »

Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séances des 4 et 18 février et du 4 mars 1885.)

1. Étant donné un système (C) de courbes planes, considérons des courbes K, formant le système (K), telles que les arcs de ces courbes, compris entre deux quelconques des courbes du système (C), soient tous égaux entre eux. Nous dirons que les courbes K sont des *trajectoires isométriques* du système (C).

Il est bien évident que, pour un système (C) donné, il existe une infinité de systèmes de trajectoires isométriques; on pourra se

donner arbitrairement l'une des courbes du système (K); les autres s'en déduiront, et nous dirons qu'elles sont *isométriques de la première par rapport au système* (C). Dans la présente Note, nous nous occupons de la recherche de ces *isométriques* lorsque la courbe qu'on se donne est une droite D.

On remarquera que la définition géométrique des trajectoires isométriques se traduit par une propriété cinématique de ces courbes qui est la suivante : Si des points, situés au même instant sur une courbe du système (C), décrivent des trajectoires isométriques de ce système, en ayant tous à chaque instant la même vitesse, ils se trouveront constamment ensemble sur une même courbe du système (C).

2. Supposons les axes rectangulaires, l'axe des y étant parallèle à la droite D donnée, et à la distance a de cette droite, soit

$$F(x, y, \lambda) = 0, \tag{1}$$

où λ est un paramètre arbitraire, l'équation des courbes du système (C). L'ordonnée h du point où l'une des courbes C coupe la droite D est donnée par

$$F(a, h, \lambda) = 0.$$

Éliminant λ entre cette équation et la précédente, on a

$$h = \varphi(x, y), \tag{2}$$

d'où

$$dh = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy.$$

Par suite, il vient, pour l'équation différentielle des isométriques de la droite D,

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{3}$$

ou

$$(\varphi'^2_y - 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\varphi'_x\varphi'_y\frac{dy}{dx} + (\varphi'^2_x - 1) = 0. \tag{3'}$$

Cette équation du premier ordre et du deuxième degré montre qu'il existe deux systèmes d'isométriques répondant à la droite D donnée. Nous allons intégrer cette équation dans quelques cas.

3. On aperçoit immédiatement un cas assez étendu d'intégra-

tion. C'est celui où *le système* (C) *est formé par les positions successives d'une courbe invariable glissant sur le plan parallèlement à la droite* D. Nous dirons, pour abréger, qu'un tel système est *parallèle à la droite* D.

Nous placerons ici une seconde définition qui nous sera utile plus loin. Soit (C_1) un second système parallèle à D; prenons dans (C) et dans (C_1) deux courbes quelconques C et C_1 ; le lieu du milieu d'un segment de droite parallèle à D dont les extrémités s'appuient respectivement sur C et C_1 est une courbe K; en faisant varier les courbes C et C_1 respectivement dans les systèmes (C) et (C_1), nous obtenons un système (K) également parallèle à D. Nous dirons que *le système* (K) *est le système moyen des systèmes* (C) *et* (C_1).

Cela posé, observons que l'équation (1) est ici

$$y = f(x) + \lambda;$$

par suite, l'équation (2)

$$\lambda = y - f(x) + f(a)$$

et l'équation (3)

$$dy - f'(x)dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Élevant au carré, nous avons, après réduction,

$$dx^2[f'(x)^2 - 1] = 2f'(x)dx\,dy.$$

Supprimons le facteur dx auquel correspond la solution évidente $x = C$, c'est-à-dire les droites parallèles à D; il vient

$$(4) \qquad dy = \frac{f'(x)^2 - 1}{2f'(x)}dx,$$

d'où, en intégrant,

$$(4 \textit{ bis}) \qquad y = \frac{1}{2}\left[f(x) - \int \frac{dx}{f'(x)}\right] + C.$$

Or

$$y = -\int \frac{dx}{f'(x)} + C$$

est l'équation du système des trajectoires orthogonales, ou système orthogonal du système donné, système qui est aussi parallèle à la droite D; par suite, l'équation (4) représente le système

moyen du système donné et du système de ses trajectoires orthogonales, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Les isométriques d'une droite (D), *par rapport à un système* (C) *parallèle à cette droite, sont données* (*en outre des droites parallèles à* D) *par le système moyen du système* (C) *et de son système orthogonal.*

Ou encore :

Si les systèmes (C) *et* (C_1), *parallèles à la droite* D, *sont orthogonaux entre eux, le système moyen de* (C) *et* (C_1) *est isométrique de la droite* D *par rapport à l'un ou à l'autre de ces deux systèmes.*

En particulier, si nous supposons que les courbes C sont des paraboles ayant leur axe dirigé suivant D,

$$y = \frac{x^2}{2p} + c,$$

leurs trajectoires orthogonales C_1 sont des logarithmiques

$$y = -\frac{p}{2} \log x + c,$$

qui ont la droite D pour asymptote, et les isométriques de la droite D par rapport à (C) ou à (C_1) sont données par

$$y = \frac{x^2}{4p} - \frac{p}{2} \log x + c.$$

On reconnaît là l'équation de la fameuse *courbe du chien* lorsque le maître parcourt la droite D et que le chien a même vitesse que son maître.

4. Il y a un cas où la solution du problème est intuitive : c'est lorsqu'il s'agit de trouver les *isométriques d'une droite par rapport à un système de cercles concentriques.* On voit immédiatement que ce sont les tangentes à celui des cercles du système qui est tangent à la droite considérée.

Analytiquement, ce résultat s'obtient bien aisément. En effet, l'équation (2) est ici

$$h = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

d'où, en posant $\frac{dy}{dx} = y'$,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}.$$

L'équation (3) devient alors

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Chassant le dénominateur, élevant au carré et réduisant, on met cette équation sous la forme

$$(y - xy')^2 = a^2(y'^2 + 1)$$

ou

$$y = xy' + a\sqrt{y'^2 + 1},$$

équation de Clairaut, d'où se déduit immédiatement le résultat indiqué plus haut.

5. *Isométriques d'une droite* D *par rapport à un système de droites concourantes.* — Nous prenons pour origine O le point de concours de ces droites (dont la distance à la droite D est a), pour axe des x et pour axe des y la perpendiculaire et la parallèle à D, menées par O.

L'équation (2) est, dans ce cas,

$$h = \frac{ay}{x};$$

par suite,

$$dh = a\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},$$

et il vient, en posant $\frac{dy}{dx} = y'$, pour l'équation différentielle de la courbe,

$$(5) \qquad xy' - y = \frac{x^2}{a}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Dérivons les deux membres de cette équation par rapport à x; il vient, après division par x, ce qui ne supprime aucune solution géométrique du problème,

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{2\sqrt{1 + y'^2}}{a} + \frac{xy'}{a\sqrt{1 + y'^2}}\frac{dy'}{dx},$$

équation que nous pouvons écrire

$$\frac{dx}{dy'} + x\frac{y'}{2(1+y'^2)} = \frac{a}{2\sqrt{1+y'^2}}.$$

Sous cette forme on voit qu'elle est linéaire et du premier ordre en x considéré comme fonction de y', et l'on a, par application de la formule connue, et en désignant par C une constante arbitraire,

$$x = e^{-\int \frac{y'}{2(1+y'^2)}dy'}\left[C + a\int e^{\int \frac{y'}{2(1+y'^2)}dy'} \frac{dy'}{2\sqrt{1+y'^2}}\right],$$

ou, en remarquant que $\int \frac{y'}{2(1+y'^2)}dy' = \log \sqrt[4]{1+y'^2}$, et que $e^{\log\sqrt[4]{1+y'^2}} = \sqrt[4]{1+y'^2}$,

$$(6) \qquad x = \frac{C + a\int \frac{dy'}{2\sqrt[4]{1+y'^2}}}{\sqrt[4]{1+y'^2}}.$$

Occupons-nous maintenant de l'intégrale $I = \int \frac{dy'}{2\sqrt[4]{1+y'^2}}$, qui figure dans la solution.

Si nous effectuons le changement de variable $\sqrt{1+y'^2} = v^2$, nous voyons que cette intégrale prend la forme

$$I = \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{v^4-1}},$$

et que les formules (5) et (6) donnent pour x et y les valeurs

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{C + a\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{v^4-1}}}{v}, \\ y = x(\sqrt{v^4-1} - xv^2). \end{cases}$$

L'intégrale I appartient à la classe des intégrales elliptiques de seconde espèce; nous allons essayer de la ramener à la forme normale, ce qui nous permettra ensuite de l'exprimer au moyen des fonctions Θ.

Si nous effectuons le changement de variable $v = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, nous

voyons que l'intégrale I prend la forme

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{2}\right)}}.$$

Elle semble alors, à première vue, rentrer dans la catégorie des intégrales elliptiques de troisième espèce, prises sous la forme normale que leur a donnée Legendre; mais il n'en est rien, parce que, au dénominateur, les zéros de la partie extérieure au radical sont aussi des zéros de la partie soumise à ce radical.

Si nous posons

$$t = \operatorname{sn} u \quad \left(K = \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

nous voyons que

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u};$$

or les formules (43) et (45) du *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet (2e édition, p. 260) donnent

$$\frac{1}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{1}{g^2 K'^2}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} - D_u^2 \log \theta_2(u)\right].$$

Ici, le multiplicateur g est égal à 1, et

$$K'^2 = 1 - K^2 = \tfrac{1}{2};$$

par suite,

$$\frac{1}{\operatorname{cn}^2 u} = 2\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} - D_u^2 \log \theta_2(u)\right]$$

et

$$I = \sqrt{2}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} u - \frac{\theta_2'(u)}{\theta_2(u)}\right].$$

Un calcul bien facile montre que x et y sont alors donnés par

$$(8)\quad \begin{cases} x = \operatorname{cn} u \left\{ C + a\sqrt{2}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} u - \frac{\theta_2'(u)}{\theta_2(u)}\right]\right\}, \\ y = \frac{x}{\operatorname{cn}^2 u}\left(\operatorname{sn} u \sqrt{1+\operatorname{cn}^2 u} - x\right). \end{cases}$$

x et y se trouvent ainsi exprimés au moyen des notations classiques, mais il eût été plus simple de faire usage des notations de

M. Weierstrass (¹). Si, en effet, dans l'intégrale I prise sous la forme $\int \frac{v^2\,dv}{\sqrt{v^4-1}}$, on effectue le changement de variable $v^2 = w$, on a

$$I = \int \frac{w\,dw}{\sqrt{4w^3-4w}}.$$

En posant

$$u = \int_\infty^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3-4w}},$$

on a

$$w = p(u)$$

et

$$\int \frac{w\,dw}{\sqrt{4w^3-4w}} = \int p(u)\,du = -\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)};$$

par suite,

$$(9)\quad \begin{cases} x = \dfrac{C - a\dfrac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}}{\sqrt{p(u)}}, \\ y = x\left[\sqrt{p(u)^2-1} - x\,p(u)\right]. \end{cases}$$

Les quantités que M. Weierstrass désigne par g_2 et g_3, et qui remplacent le module, sont ici $g_2 = 4$, $g_3 = 0$.

6. *Isométriques d'une droite par rapport à un système d'hyperboles équilatères de mêmes asymptotes, l'une de ces asymptotes étant parallèle à la droite donnée.* — Nous prenons naturellement ces asymptotes pour axes de coordonnées. L'équation (2) est, dans ce cas,

$$h = \frac{xy}{a};$$

par suite,

$$dh = \frac{x\,dy + y\,dx}{a},$$

(¹) Voir à ce sujet, p. 77 et suivantes, du *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*, par M. Halphen (*Recueil des Savants étrangers*, t. XXVIII) et, du même auteur, la *Note sur l'inversion des intégrales elliptiques* (*Journal de l'École Polytechnique*, LIVᵉ Cahier).

et l'équation (3) devient, en posant $\frac{dy}{dx} = y'$,

(10) $$y + xy' = a\sqrt{1+y'^2}.$$

Prenant les dérivées des deux membres par rapport à x, nous avons

$$2y' + x\frac{dy'}{dx} = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{dy'}{dx},$$

équation que nous pouvons écrire

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{x}{2y'} = \frac{a}{2\sqrt{1+y'^2}}.$$

Cette équation linéaire et du premier ordre en x, considéré comme fonction de y', s'intègre immédiatement par la formule

$$x = e^{-\int\frac{dy'}{2y'}}\left[C + \int e^{\int\frac{dy'}{2y'}}\frac{a\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right].$$

Remarquant que $\int\frac{dy'}{2y'} = \log\sqrt{y'}$, et que $e^{\log\sqrt{y'}} = \sqrt{y'}$, on a

(11) $$x = \frac{1}{\sqrt{y'}}\left[C + \frac{a}{2}\int\frac{dy'}{\sqrt{y'(1+y'^2)}}\right].$$

Ici, l'emploi des notations de M. Weierstrass est tout indiqué; car, si nous prenons l'intégrale qui figure dans la valeur de x sous la forme $\int\frac{dy'}{\sqrt{4y'^3+4y'}}$, et que nous posions

$$u = \int_\infty^{y'}\frac{dy'}{\sqrt{4y'^3+4y'}} \quad (g_2 = -4,\ g_3 = 0),$$

nous avons

$$y' = p(u),$$

et, par suite, en remarquant, comme l'a fait M. Halphen (¹), que $1 + p(u)^2 = \frac{p'(u)^2}{4p(u)}$,

(12) $$\begin{cases} x = \dfrac{C+au}{\sqrt{p(u)}}, \\ y = \dfrac{ap'(u)-(C+au)p(u)}{\sqrt{p(u)}}. \end{cases}$$

(¹) *Recueil des Savants étrangers*, t. XXVIII, p. 87.

Ces formules résolvent le problème, mais nous allons faire voir comment on aurait pu pousser la solution au moyen des notations classiques.

Reprenons l'intégrale

$$I = \int \frac{dy'}{\sqrt{y'(1+y'^2)}}.$$

Si nous posons $y' = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, nous voyons, par un calcul facile, que l'intégrale I prend la forme

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

Si nous faisons maintenant $\sin\theta = \cos^2\varphi$, nous avons

$$d\theta = -\frac{2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\cos^4\varphi}} = -\frac{2\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}, \quad \sqrt{\sin\theta} = \cos\varphi$$

et, par suite,

$$I = -\sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = -\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Nous sommes ainsi amenés à la forme trigonométrique normale de l'intégrale elliptique de première espèce pour la valeur $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$ du module. Si donc nous posons

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

nous avons

$$y' = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\cos^2\varphi}{1+\sqrt{1-\cos^4\varphi}} = \frac{\operatorname{cn}^2 u}{1+\operatorname{sn} u\sqrt{1+\operatorname{cn}^2 u}},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{2}{\sqrt{1+\operatorname{sn} u\sqrt{1+\operatorname{cn}^2 u}}}$$

et, par suite, en vertu de (11) et de (10),

$$(13)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\left(C - \dfrac{au}{2}\right)\sqrt{1+\operatorname{sn} u\sqrt{1+\operatorname{cn}^2 u}}}{\operatorname{cn} u}, \\[2ex] y = \dfrac{-\left(C - \dfrac{au}{2}\right)\operatorname{cn} u + 2a}{\sqrt{1+\operatorname{sn} u\sqrt{1+\operatorname{cn}^2 u}}}. \end{cases}$$

7. *Isométriques d'une droite par rapport à un système de cercles passant tous par un point de la droite et ayant tous leur centre sur cette droite.* — Ici nous prendrons la droite pour axe des x, l'origine étant au point de cette droite commun à tous les cercles.

Soit h le diamètre du cercle du système, qui passe par le point (x, y) de l'une des isométriques cherchées. On a

$$h = \frac{x^2 + y^2}{x};$$

d'où

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2x(x + yy') - (x^2 + y^2)}{x^2}.$$

Par suite, l'équation différentielle cherchée sera

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{2x(x + yy') - (x^2 + y^2)}{x^2}$$
$$= 1 + 2y'\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = (1 + y'^2) - \left(\frac{y}{x} - y'\right)^2,$$

que nous pourrons écrire

(14) $$y = x\left(y' + \sqrt{1 + y'^2 - \sqrt{1 + y'^2}}\right).$$

Après avoir posé

$$R(y') = \sqrt{1 + y'^2 - \sqrt{1 + y'^2}},$$

dérivons les deux membres de l'équation précédente par rapport à x; nous avons, après réduction,

$$x[1 + R'_{y'}(y')]\frac{dy'}{dx} + R(y') = 0,$$

que nous pourrons écrire

$$\frac{dx}{x} + \frac{R'_{y'}(y')}{R(y')}dy' + \frac{dy'}{R(y')} = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$\log x + \log R(y') + \int \frac{dy'}{R(y')} = c.$$

ou

(15) $$x\,R(y')\,e^{\int \frac{dy'}{R(y')}} = C,$$

C étant une constante arbitraire.

Reste à trouver la valeur de l'intégrale

$$I = \int \frac{dy'}{R(y')} = \int \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2 - \sqrt{1+y'^2}}}.$$

Si nous posons $\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{v}$, nous avons

$$dy' = \frac{-dv}{v^2\sqrt{1-v^2}}$$

et, par suite,

$$I = -\int \frac{dv}{v^2\sqrt{1-v^2}\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{v}}} = -\int \frac{dv}{v(1-v)\sqrt{1+v}}.$$

Faisons maintenant $\sqrt{1+v} = t$; il vient

$$I = -2\int \frac{t\,dt}{(t^2-1)(2-t^2)t} = 2\int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2-2)}.$$

Décomposant cette fraction rationnelle en fractions simples, on trouve bien aisément pour valeur de I

$$I = \log\left[\frac{t+1}{t-1}\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]$$

et, par suite,

$$e^I = \frac{t+1}{t-1}\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

D'ailleurs

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{v} = \frac{1}{t^2-1}.$$

L'équation (15) devient donc

$$x\frac{\sqrt{2-t^2}}{t^2-1}\,\frac{t+1}{t-1}\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = C$$

ou

(16) $$x = C\,\frac{(t-1)^2}{\sqrt{2-t^2}}\left(\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}};$$

On a aussi

$$y'^2 = \frac{1}{(t^2-1)^2} - 1 = \frac{t^2(2-t^2)}{(t^2-1)^2}.$$

et, par suite,

$$y' + \sqrt{1+y'^2 - \sqrt{1+y'^2}} = \frac{t\sqrt{2-t^2}}{t^2-1} + \frac{\sqrt{2-t^2}}{t^2-1} = \frac{\sqrt{2-t^2}}{t-1}.$$

Dès lors, les formules (14) et (16) donnent pour la valeur de y

$$(17) \qquad y = C(t-1)\left(\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Les formules (16) et (17) résolvent le problème.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 7 NOVEMBRE 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Communications :

M. Lemoine : *Sur les nombres pseudosymétriques.*

M. Poincaré : *Sur la réduction des intégrales abéliennes.*

M. Picard : *Sur les fonctions hyperfuchsiennes qui proviennent de la fonction hypergéométrique à deux variables.*

SÉANCE DU 21 NOVEMBRE 1884.

PRÉSIDENCE DE M. TCHEBICHEFF

Élection : M. Paraf, agrégé de l'Université, présenté par MM. Raffy et Picard, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Marchand : *Méthode pour mener le plan tangent à une surface gauche.*

M. Lebon : *Sur la construction de la tangente au point d'origine de l'ombre portée d'un cône creux sur lui-même.*

M. Tchebicheff : *Sur les fonctions rationnelles qui représentent le mieux la racine carrée d'une variable entre des limites données.*

— *Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvements sur certaines lignes.*

M. d'Ocagne : *Sur certaines figures minima.*

M. Humbert : *Sur les courbes unicursales.*

SÉANCE DU 5 DÉCEMBRE 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Communications :

M. Fouret : *Sur l'approximation à l'aide des séries trigonométriques.*

M. Appell : *Sur une méthode élémentaire applicable au développement des fonctions elliptiques.*

M. Weill : *Sur la décomposition des nombres en quatre carrés.*

M. Picard : *Sur les intégrales de différentielles totales de première espèce.*

SÉANCE DU 19 DÉCEMBRE 1884.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élections : M. Chrytal, présenté par MM. Hermite et Picard, et M. Vandame, présenté par MM. Picard et Poincaré, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Fouret : *Sur l'approximation par les séries trigonométriques.*

M. Poincaré : *A propos de la dernière Communication de M. Appell.*

M. Picard : *Sur les intégrales de différentielles totales de première espèce.*



SÉANCE DU 7 JANVIER 1885.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Élection : M. Joachim Martins da Silva, présenté par MM. Rouché et de Comberousse, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Vicaire : *Sur la loi de l'attraction newtonienne.*

SÉANCE DU 21 JANVIER 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur un procédé graphique de résolution des équations du troisième degré.*

M. Lebon : *Sur la construction de l'intersection d'une droite et d'une conique.*

M. Raffy : *Sur les conditions pour qu'une fonction liée à sa dérivée par une équation algébrique soit uniforme.*

M. Fouret : *Sur une propriété des déterminants.*

SÉANCE DU 4 FÉVRIER 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Élection : M. Guyon, présenté par MM. Appell et Simart, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Appell : *Sur la chaînette sphérique.*

M. d'Ocagne : *Sur l'intégration de l'équation*

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 + \rho^2 = \frac{1}{\cos^4 \omega}.$$

M. Fouret : *Sur une manière de former les équations différentielles de certaines courbes.*

M. Raffy : *Sur le genre des équations modulaires.*

SÉANCE DU 18 FÉVRIER 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Élection : M. Neuberg, présenté par MM. d'Ocagne et Poincaré, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Poincaré : *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.*

M. Fouret : *Sur certaines questions de maxima.*

M. Humbert : *Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre.*

M. d'Ocagne : *Sur la rectification d'une classe de courbes.*

SÉANCE DU 4 MARS 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur les courbes isométriques d'une droite.*

M. Rouché : *Sur la dernière Communication de M. Lebon.*

M. Fouret : *Sur une question de maximum relative aux probabilités.*

SÉANCE DU 18 MARS 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Communications :

M. Halphen : *Sur l'herpolhodie de Poinsot.*

M. Fouret : *Sur le cas particulier où l'herpolhodie se réduit à une spirale.*

SÉANCE DU 1er AVRIL 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Élection : M. G. Cantor, professeur à l'université de Halle, présenté par MM. Appell et Poincaré, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Weill : *Sur les courbes unicursales.*

M. Poincaré : *Sur le problème des trois corps.*

— *Sur la stabilité de l'anneau de Saturne.*

M. Humbert : *Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DU 31 JUILLET 1884 AU 1er AVRIL 1885.

Masoni, *Sulle forze impulsive che hanno la medesima azione sopra uno stesso punto di un systema rigido.*

— *Sulle derivate di ordine qualunque della funzione potenziale quando l'attrazione è proporzionale alla n^a potenza della distanza.*

De Longchamps, *Géométrie analytique à deux dimensions.*

— *Géométrie analytique à trois dimensions.*

— *Algèbre.*

Lemoine, *Sur le losange de Peaucellier.*

Catalan, *Sur quelques décompositions en carrés.*

Pepoli, *Sopra un problema delle trasformazioni cremoniane.*

Königs, *Sur une généralisation du théorème de Fermat.*

Catalan, *Problèmes de probabilités.*

— *Questions d'Arithmétique.*

Fechner, *Ueber die Frage der Weberschen Gesetzes.*

Hatt, *Notions sur le phénomène des marées.*

Pellet, *Sur le Calcul infinitésimal.*

— *Sur les fonctions linéaires.*

Kronecker, *Ueber die Irreductibilität der Gleichungen.*

Kronecker, *Zur Theorie der elliptischen Functionen.*
— *Ueber den vierten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes.*
— *Zur Theorie des Elimination einer Variabeln.*
— *Zur Theorie der Abelschen Gleichungen.*
— *Die Zerlegung einer ganzen Grösse eines natürlichen Rationalitätsbereiches in ihre irreductibeln Factoren.*
— *Die Subdeterminante symmetrischer Systeme.*
— *Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln.*
— *Die Composition Abelscher Gleichungen.*
— *Ueber die Multiplication der elliptischen Functionen.*
— *Zur Theorie der Formen höherer Stufen.*
— *Beweis einer Jacobischen Integralformen.*
— *Beweis der Puiseux'schen Satzes.*
— *Ueber bilineare Formen mit 4 Variabeln.*

ÉCHANGES NOUVEAUX.

Meteorologische Zeitschrift de Berlin.
Bulletin de la Société belge d'Électriciens.

ERRATA ET OMISSA.

C'est par erreur que l'un des derniers numéros du *Bulletin* annonce que M. Schlömilch a demandé l'échange de sa *Zeitschrift für Mathematik* avec le *Bulletin de la Société.* Cet échange a été décidé sur la proposition de M. Stephanos, archiviste de la Société.

Dans la Table générale des matières des dix premiers Volumes qui a paru à la fin du tome XII, on a omis de signaler un Mémoire de M. Lebon *Sur les surfaces développables,* qui a été inséré dans le tome VIII.

A cette occasion, nous appelons l'attention des auteurs sur la nécessité de nous signaler les omissions qu'ils pourraient remarquer dans les Tables annuelles. Les Tables décennales étant faites à l'aide des Tables annuelles reproduisent naturellement les erreurs qui peuvent s'y être glissées.

Sur les surfaces homofocales du second ordre;
Par G. Humbert.

(suite et fin.)

(Séance du 18 février 1885.)

V.

Il nous reste maintenant à traiter la deuxième question que nous nous sommes posée :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe représentée par des équations de la forme (1) *ne soit pas de degré n.*

Dans le cas où cette courbe est de degré n, nous avons montré (§ III) :

1° Que les fonctions $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ sont linéairement indépendantes.

2° Que les équations (5), déduites des équations fondamentales (4), ne sont pas en nombre supérieur à $n-1$.

Si, au contraire, la courbe n'est pas de degré n, une de ces deux conditions n'est pas remplie.

Pour le faire voir, nous allons examiner successivement les deux cas, signalés au § III, où la courbe S est de degré inférieur à n.

Dans le premier de ces cas, les trois polynômes $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ ont k zéros communs : nous montrerons que les équations (5) sont alors en nombre égal à $n+k-1$.

Dans le second cas, à un point de la courbe correspondent p valeurs de l'argument t; nous montrerons que les fonctions $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ sont liées par $\frac{n}{p}(p-1)$ relations linéaires et homogènes.

Premier cas. — Supposons d'abord que les polynômes $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ aient k zéros communs, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, que, pour simplifier le raisonnement, nous supposerons différents.

Considérons les équations fondamentales (4)

$$(4)\qquad A_{44}f_4^2 + A_{45}f_4 f_5 + \ldots + A_{n+1,n+1}f_{n+1}^2 + \Phi_1 f_4 + \ldots = \Omega_1$$

et faisons-y $t = \theta_1$: les polynômes $\Phi_1, \ldots, \Omega_1, \ldots$, homogènes en f_1, f_2, f_3 s'annulent, et il reste

$$A_{44}f_4^2(\theta_1) + A_{45}f_4(\theta_1)f_5(\theta_1) + \ldots = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a des équations analogues en faisant $t = \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_k$.

Par conséquent, les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations linéaires et homogènes, à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ inconnues,

$$(15)\qquad \begin{cases} A_{44}x_{44} + A_{45}x_{45} + \ldots + A_{n+1,n+1}x_{n+1,n+1} = 0, \\ B_{44}x_{44} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_{44}x_{44} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

sont vérifiées par les k systèmes de solutions

$$\frac{x_{44}}{f_4^2(\theta_1)} = \frac{x_{45}}{f_4(\theta_1)f_5(\theta_1)} = \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{x_{44}}{f_4^2(\theta_k)} = \frac{x_{45}}{f_4(\theta_k)f_5(\theta_k)} = \ldots.$$

Je dis que ces k systèmes de solutions sont différents, ou, en d'autres termes, que les relations

$$\frac{f_4^2(\theta_1)}{f_4^2(\theta_2)} = \frac{f_4(\theta_1)f_5(\theta_1)}{f_4(\theta_2)f_5(\theta_2)} = \ldots$$

sont impossibles.

Ces équations entraînent, en effet, les suivantes :

$$(16)\qquad \frac{f_4(\theta_1)}{f_4(\theta_2)} = \frac{f_5(\theta_1)}{f_5(\theta_2)} = \ldots.$$

On a d'ailleurs, par hypothèse,

$$f_1(\theta_1) = f_2(\theta_1) = f_3(\theta_1) = 0,$$
$$f_1(\theta_2) = f_2(\theta_2) = f_3(\theta_2) = 0.$$

Tout polynôme de degré n en t est fonction linéaire des polynômes $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_{n+1}$: si les relations (16) étaient vérifiées, on pourrait en conclure que tout polynôme de degré n, s'an-

nulant pour $t = \theta_1$, s'annule pour $t = \theta_2$, ce qui est impossible puisque θ_1 et θ_2 sont différents.

On voit de même que les quantités $f_4(\theta_1), f_5(\theta_1), \dots, f_{n+1}(\theta_1)$ ne sont pas nulles à la fois.

Les équations (15) sont donc vérifiées par k systèmes différents de valeurs, non nulles simultanément, et par suite :

1° Les déterminants d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ formés avec la matrice

$$(\mathrm{M}) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} A_{44} & A_{45} & \dots & A_{n+1,n+1} \\ B_{44} & \dots & \dots & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ L_{44} & \dots & \dots & \dots\dots \end{array} \right\|$$

sont nuls.

2° Il en est de même des déterminants obtenus en supprimant dans l'un quelconque des précédents i lignes et i colonnes quelconques ($i = 1, 2, \dots, k-1$).

Il en résulte qu'en éliminant $f_4^2, f_4, f_5, \dots, f_{n+1}^2$ entre les équations (4), on trouvera $(n-k+1)$ équations de la forme (5).

Second cas. — Supposons que, quel que soit t, on puisse trouver une valeur u, différente de t, telle que les équations

$$\frac{f_1(u)}{f_1(t)} = \frac{f_2(u)}{f_2(t)} = \frac{f_3(u)}{f_3(t)}$$

soient satisfaites.

En ce cas, comme on l'a dit, à un point de la courbe S correspondent plusieurs valeurs du paramètre t : soit p le nombre de ces valeurs, que nous désignerons respectivement par t, $u_1(t)$, $u_2(t), \dots, u_{p-1}(t)$.

Posons, pour simplifier,

$$\mathrm{X}(t) = \frac{f_2(t)}{f_1(t)}, \quad \mathrm{Y}(t) = \frac{f_3(t)}{f_1(t)}.$$

Par hypothèses les deux équations

$$\mathrm{X}(u) = \mathrm{X}(t), \quad \mathrm{Y}(u) = \mathrm{Y}(t)$$

sont satisfaites, quel que soit t, pour les p valeurs de u :

$$t, \ u_1(t), \ \dots, \ u_{p-1}(t).$$

Nous allons faire voir que dans ce cas la courbe décrite par

le point $[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$ est unicursale et que son degré est $\frac{n}{p}$.

En effet, les zéros communs aux deux équations algébriques en u : $X(u) = X(t)$, $Y(u) = Y(t)$ satisfont à une équation algébrique de degré p, qui, mise sous forme entière, sera

$$M(t)u^p + N(t)u^{p-1} + \ldots + S(t) = 0. \tag{17}$$

M, N, ... sont des polynômes entiers en t.

On a, par suite, identiquement,

$$\left\{\begin{aligned} &M(t)(u-t)[u-u_1(t)]\ldots[u-u_{p-1}(t)] \\ &\quad = M(t)u^p + N(t)u^{p-1} + \ldots + S(t). \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Observons maintenant que les équations

$$X(u) = X(t), \quad Y(u) = Y(t)$$

ne changent pas si l'on y permute u et t; en d'autres termes, l'équation (17) qui lie u et t aura pour racines, si l'on y considère t comme l'inconnue, les quantités u, $u_1(u)$, $u_2(u)$, ..., $u_{p-1}(u)$.

On a ainsi, k étant un facteur constant,

$$M(t)u^p + N(t)u^{p-1} + \ldots = k[M(u)t^p + N(u)t^{p-1} + \ldots];$$

d'où, en tenant compte de (18), l'identité

$$M(t)(u-t)[u-u_1(t)]\ldots = kM(u)(t-u)[t-u_1(u)]\ldots. \tag{19}$$

Remarquons en second lieu que la suite des quantités

$$u_i(t),\ u_1[u_i(t)],\ u_2[u_i(t)],\ \ldots,\ u_{p-1}[u_i(t)],$$

où i est un des entiers 1, 2, ..., $p-1$, est, à l'ordre près, identique à la suite

$$t,\ u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_{p-1}(t).$$

On a en effet

$$X[u_i(t)] = X(t),$$
$$Y[u_i(t)] = Y(t),$$

et par suite les quantités qui vérifient les relations

$$X(u) = X(t), \quad Y(u) = Y(t)$$

sont identiques à celles qui vérifient les relations

$$X(u) = X[u_i(t)], \quad Y(u) = Y[u_i(t)],$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Posons maintenant, α et β étant deux constantes,

$$Z(t) = \frac{(t-\alpha)[t-u_1(\alpha)]\ldots[t-u_{p-1}(\alpha)]}{(t-\beta)[t-u_1(\beta)]\ldots[t-u_{p-1}(\beta)]}.$$

On a

$$Z[u_i(t)] = \frac{[u_i(t)-\alpha][u_i(t)-u_1(\alpha)]}{[u_i(t)-\beta][u_i(t)-u_1(\beta)]}\cdots.$$

Or l'équation (19) donne, si l'on y fait $u = u_i(t)$ et $t = \alpha$,

$$\begin{aligned}&M(\alpha)[u_i(t)-\alpha][u_i(t)-u_1(\alpha)]\ldots\\ &\quad = kM_1[u_i(t)][\alpha-u_i(t)]\{\alpha-u_1[u_i(t)]\}\ldots.\end{aligned}$$

Le second membre est égal, d'après la remarque précédente, à

$$kM_1[u_i(t)](\alpha-t)[\alpha-u_1(t)]\ldots[\alpha-u_{p-1}(t)].$$

On a une relation analogue en β, et l'on en conclut, par division,

$$Z[u_i(t)] = \frac{M(\beta)}{M(\alpha)}\,\frac{(\alpha-t)[\alpha-u_1(t)][\alpha-u_2(t)]}{(\beta-t)[\beta-u_1(t)]}\cdots.$$

Si maintenant on fait, dans l'identité (19), $u = \alpha$, on a

$$M(t)(\alpha-t)[\alpha-u_1(t)\ldots = kM(\alpha)(t-\alpha)[t-u_1(\alpha)]\ldots;$$

de même

$$M(t)(\beta-t)[\beta-u_1(t)]\ldots = kM(\beta)(t-\beta)[t-u_1(\beta)]\ldots$$

et, par suite,

$$Z[u_i(t)] = Z(t).$$

Il en résulte que les quantités t, $u_1(t)$, ..., $u_{p-1}(t)$ sont les racines d'une équation algébrique en u, de degré p, de la forme

$$(20) \qquad Z(u) = Z(t).$$

Cela posé, remarquons que les fonctions rationnelles de t, $X(t)$ et $Z(t)$ sont liées par une relation algébrique; si l'on se donne $Z(t)$, on a, pour t, p valeurs correspondantes, satisfaisant à une relation de la forme

$$Z(t) = \lambda \quad \text{ou} \quad Z(t) = Z(\theta).$$

Ces p valeurs sont donc θ, $u_1(\theta)$, $u_2(\theta)$, ..., $u_{p-1}(\theta)$ et, en vertu des relations

$$X[u_i(\theta)] = X(\theta),$$

il ne correspond à ces p valeurs qu'une valeur de X. En d'autres termes, $X(t)$ est fonction rationnelle de $Z(t)$. On verrait aisément que le degré de cette fonction est $\frac{n}{p}$.

On a des conclusions identiques pour $Y(t)$. Il en résulte que le point (f_1, f_2, f_3) décrit une courbe unicursale de degré $\frac{n}{p}$. Ce nombre est évidemment un entier; posons $\frac{n}{p} = m$.

Cherchons maintenant ce que représentent les courbes $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, ..., $\Delta_{p-1} = 0$, dont nous avons appris à former l'équation au § II.

D'après ce qui a été démontré dans ce paragraphe, ces courbes ont un point multiple d'ordre $p - 1$ en tout point multiple d'ordre p de S, ou plutôt, ainsi que cela résulte de la démonstration même, en tout point de S auquel correspondent p arguments.

Or ici, à tous les points de S correspondent p arguments de la forme

$$t,\ u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_{p-1}(t);$$

les courbes Δ ont donc un point multiple d'ordre $p - 1$ en chacun de ces points.

On aura donc, en désignant par $\sigma = 0$ l'équation de la courbe de degré m décrite par le point (f_1, f_2, f_3),

$$\Delta_i = \sigma^{p-1}\delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{21}$$

δ_i désignant un polynôme d'ordre $n - 2 - m(p - 1)$, c'est-à-dire d'ordre $m - 2$, en x_1, x_2, x_3.

La courbe unicursale σ a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, à chacun desquels correspondent $2p$ valeurs de l'argument de la forme

$$t,\ u_1(t),\ \ldots,\ u_{p-1}(t),$$
$$t',\ u_1(t'),\ \ldots,\ u_{p-1}(t').$$

Les courbes Δ doivent avoir en ces points un point multiple d'ordre $2p - 1$, et par suite ces points, en vertu des identités (21),

sont des points simples des courbes représentées par les équations $\delta_i = 0$.

Les courbes δ_i sont donc des courbes de degré $m - 2$, adjointes à la courbe unicursale σ, de degré m; or, pour une telle courbe, l'équation générale des courbes adjointes de degré $m - 2$ est de la forme

$$0 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \ldots + \alpha_{m-1} \rho_{m-1},$$

$\alpha_1, \ldots$ étant des constantes et les courbes $\rho_i = 0$ des courbes adjointes de degré $m - 2$. On en conclut que les polynômes δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ sont liés par $n - 1 - (m - 1)$, c'est-à-dire $n - m$ relations linéaires et homogènes, et, en vertu des identités (21), les mêmes relations subsistent entre les polynômes $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$.

C'est là précisément le résultat que nous avions énoncé, et qu'il s'agissait de démontrer.

Ainsi :

Pour que la courbe représentée par les équations (1) *soit de degré n, il faut et il suffit :*

1° *Que les équations* (5), *obtenues en éliminant entre les équations* (4) *les quantités* $f_4^2, f_4 f_5, \ldots, f_{n+1}^2$, *ne soient pas en nombre supérieur à* $n - 1$.

Cette condition s'exprime en écrivant que les déterminants d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ formés avec la matrice (M) ne sont pas nuls à la fois.

2° *Que les fonctions* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$, *formées comme on l'a dit au* § II, *à l'aide des équations* (5), *soient linéairement indépendantes.*

Sur les surfaces homofocales du second ordre;
Par M .G. Humbert.

(Séance du 1er avril 1885.)

Le présent travail a pour but d'exposer, à l'aide d'une méthode spéciale de démonstration, un certain nombre de propriétés des quadriques homofocales, dont les unes sont déjà connues et dont



les autres me semblent nouvelles : cette méthode s'applique également aux surfaces du quatrième degré à conique double, ainsi que je l'ai fait voir dans un Mémoire qui paraîtra prochainement.

1. Soient E une surface du second ordre, σ_1 une conique quelconque située dans le plan de l'infini, et passant par les quatre points communs à E et au cercle de l'infini.

Je dirai que deux points a et b et de E sont conjugués dans le système σ_1 si la droite ab rencontre la conique σ_1 : d'après cela, deux points de E, situés l'un ou l'autre à distance finie, sont conjugués dans un système et dans un seul.

Les droites joignant deux points de E conjugués dans un système σ_1 sont donc parallèles aux génératrices d'un cône H du second ordre, homocyclique à E, et réciproquement.

Une sphère quelconque, S, coupe E suivant une courbe par laquelle on peut faire passer quatre cônes du second ordre, homocycliques à E : les génératrices d'un de ces cônes coupent donc E en des points a et b, a' et b', ... conjugués dans un même système.

Les points a et b, a' et b', situés sur deux de ces génératrices, sont dans un même plan et par suite sur un cercle de la sphère S; il en résulte aisément que :

Tout cercle qui passe par deux points de E *coupe cette surface en deux nouveaux points conjugués dans le même système;* et réciproquement : *si quatre points de* E *sont sur un cercle, deux d'entre eux sont conjugués dans le même système que les deux autres.*

Je dirai qu'une sphère S appartient *au groupe σ_1 de sphères,* si l'un des cônes du second ordre, passant par l'intersection de E et de S, contient la conique σ_1 : une sphère appartient donc à quatre groupes.

D'après cela, le cône H, qui a pour base la conique σ_1 et pour sommet un point quelconque m de l'espace, coupe E suivant une courbe située sur une sphère S, appartenant au groupe σ_1. Si le point m s'éloigne à l'infini sur une droite rencontrant la conique σ_1, le cône H se décompose à la limite en deux plans, dont l'un est le plan de l'infini et dont l'autre touche en m la conique σ_1. En ce

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tout les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

10478. Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XIII. — N° 4.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1885

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

---

cas, la sphère S se décompose également en ces deux mêmes plans.

Il en résulte que les plans qui touchent la conique σ_1 peuvent être considérés comme des sphères de rayon infini, appartenant au groupe σ_1.

La notion des groupes de sphères est très importante dans la théorie qui va suivre, et c'est l'étude des propriétés communes aux sphères d'un même groupe qui formera l'objet principal de ce travail; une notion corrélative et aussi importante est celle des groupes de cercles bitangents.

Je dirai qu'un cercle tangent à une quadrique E en deux points a et b appartient au groupe σ_1 de cercles bitangents si les points a et b sont conjugués dans le système σ_1.

Si a' et b' sont respectivement les points infiniment voisins de a et de b sur le cercle bitangent, il résulte d'une proposition établie plus haut que a' et b' sont conjugués, comme a et b, dans le système σ_1, et par suite que le plan du cercle bitangent touche la conique σ_1.

Toute sphère passant par un cercle bitangent du groupe σ_1 appartient au groupe σ_1 de sphères.

Car cette sphère, S, coupe E suivant une courbe λ, tangente aux points a et b au cercle bitangent considéré. Il en résulte aisément, si l'on se reporte aux propriétés connues des courbes communes à une sphère et à une quadrique, qu'un des cônes du second ordre contenant la courbe λ a son sommet sur la droite ab, et que ab est une de ses génératrices. Ce cône coupe donc le plan de l'infini suivant la conique σ_1, et par suite la sphère S appartient au groupe σ_1 de sphères.

2. Ces principes établis, nous démontrerons d'abord le théorème suivant, qui est fondamental pour notre objet.

Théorème I. — *Le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un même groupe, par rapport à une surface* E *du second ordre, est une surface du second ordre homofocale à la première.*

Ce théorème repose sur deux lemmes.

Lemme I. — Le lieu des points conjugués dans un système σ_1 d'un point a de E est la courbe commune à E et à un cône du second ordre K, de sommet a, passant par la conique σ_1. Cette courbe est sur une sphère Ω, qui touche E au point a.

Lemme II. — Le lieu des centres des sphères du groupe σ_1 qui passent par le point a de E est un cône du second ordre, supplémentaire du cône K et dont le sommet coïncide avec le centre de la sphère Ω.

Soit, en effet, S une sphère du groupe σ_1 passant par a; on voit sans difficulté que cette sphère coupe Ω, suivant un cercle tangent à E au point a, et en un autre point b, conjugué de a dans le système σ_1; le plan de ce cercle touche d'ailleurs la conique σ_1. Il en résulte que le centre de la sphère S est sur une perpendiculaire menée du centre de Ω sur un plan tangent au cône K, ce qui démontre le lemme.

Cela posé, soit δ une droite quelconque rencontrant le cercle de l'infini, et coupant E en deux points c et d; cherchons en combien de points elle coupe le lieu E_1 des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1.

Si g est un de ces points, la sphère de rayon nul de centre g contient la droite δ, et, comme elle appartient par hypothèse au groupe σ_1, son centre sera (lemme II) sur le cône du second ordre qui contient les centres des sphères du groupe σ_1 passant par c. Inversement, si g est un point commun à δ et à ce cône, la sphère de centre g passant par c appartiendra au groupe σ_1 et aura évidemment un rayon nul. Il en résulte que le lieu E_1 n'a que deux points à distance finie sur la droite δ.

Si δ est une génératrice de la développable circonscrite à E et au cercle de l'infini, les points c et d sont confondus, et la normale à E au point c coïncide avec la droite δ. Or le sommet du cône qui contient les centres des sphères passant par c et appartenant au groupe σ_1 est sur la normale à E au point c (lemmes I et II); il est donc sur δ et les deux points où δ coupe ce cône, c'est-à-dire que les deux points où δ coupe E_1 sont confondus.

On voit d'ailleurs, sans difficulté, que E_1 coupe le cercle de l'infini aux quatre points de contact des tangentes communes à ce cercle et à la conique σ_1. Il en résulte que le cercle de l'infini ne

fait pas partie du lieu E_1 et, par suite, que ce lieu est une surface du second ordre, inscrite dans la développable circonscrite à E et au cercle de l'infini, c'est-à-dire une surface du second ordre homofocale à E. C. Q. F. D.

Le calcul vérifie aisément ces conclusions. Soient en effet

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0,$$

$$x^2+y^2+z^2+\theta\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)=0$$

les équations de E et d'un cône H homocyclique à cette surface, coupant le plan de l'infini suivant une conique qui sera la conique σ_1.

L'équation d'un cône parallèle à H, ayant pour sommet un point α, β, γ de l'espace, est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 \\ +\theta\left[\frac{(x-\alpha)^2}{a}+\frac{(y-\beta)^2}{b}+\frac{(z-\gamma)^2}{c}\right]=0.$$

et l'équation de la sphère, du groupe σ_1, qui passe par la courbe commune à ce cône et à E,

$$0=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 \\ +\theta\left[\frac{\alpha(\alpha-2x)}{a}+\frac{\beta(\beta-2y)}{b}+\frac{\gamma(\gamma-2z)}{c}+1\right].$$

Soient x, y, z les coordonnées du centre de cette sphère, R son rayon. On a la relation

$$\frac{x^2}{a+\theta}+\frac{y^2}{b+\theta}+\frac{z^2}{c+\theta}-1=\frac{R^2}{\theta}.$$

Si $R^2=0$, cette relation montre bien que le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1 est une quadrique E_1 homofocale à E; elle fait voir de plus que :

Le lieu des centres des sphères de rayon donné, appartenant à un groupe σ_1 par rapport à une quadrique E, *est une quadrique concentrique et homothétique à une quadrique homofocale à* E.

3. Soit a un point de la courbe commune à E et à E_1, la sphère

de rayon nul de centre a coupe E suivant une courbe par laquelle on peut faire passer un cône du second ordre contenant la conique σ_1 ; ce cône touche évidemment E au point a, et par suite :

Les plans tangents menés à une surface du second ordre le long d'une ligne de courbure sont parallèles aux plans tangents d'un cône homocyclique à cette surface.

On pourrait démontrer directement, en s'appuyant sur ce qui précède, que la courbe commune à E et à E_1 est une ligne de courbure de ces deux surfaces, et que E et E_1 se coupent à angle droit.

4. Le théorème du n° 2 est susceptible de nombreuses applications.

Soient α la courbe commune à E et à une sphère S, H un des quatre cônes du second ordre passant par cette courbe. Toute génératrice de H rencontre α en deux points a et b, conjugués dans un système fixe σ_1, et le cercle qui touche E en ces deux points est à l'intersection de S et du plan tangent à H le long de ab : ce cercle fait partie du groupe σ_1 de cercles bitangents à E. En d'autres termes, les cercles bitangents à une courbe sphérique tracée sur E forment quatre séries, et les cercles d'une même série font partie d'un même groupe σ_1, de cercles bitangents à E.

Toute sphère passant par un de ces cercles appartient (n° 1) au groupe σ_1 de sphères; et, si elle a un rayon nul, son centre est situé (théorème I) sur une quadrique E_1, homofocale à E.

D'un autre côté, on sait que les sphères de rayon nul qui passent par les cercles d'une même série, bitangents à une courbe sphérique située sur une quadrique, ont leurs centres sur une autre courbe sphérique du quatrième ordre, qu'on nomme *focale* de la première; une courbe sphérique tracée sur une quadrique a ainsi quatre focales; et il résulte de ce qui précède que :

Les quatre focales d'une courbe sphérique tracée sur une quadrique sont sur quatre surfaces du second ordre, homofocales à la proposée.

D'une manière plus générale, toute sphère du groupe σ_1 coupe E suivant une courbe dont une des focales est sur la quadrique E_1,

lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1. On peut donc énoncer cette *première propriété générale des sphères d'un même groupe* :

Les courbes communes à une quadrique et aux sphères appartenant à un même groupe par rapport à cette quadrique ont une de leurs focales sur une même quadrique, homofocale à la proposée.

On sait que les focales de la courbe α, commune à une sphère S et à une quadrique E, sont respectivement sur quatre sphères, orthogonales à S, et dont les centres coïncident avec les sommets des quatre cônes du second ordre qui passent par la courbe α. Il en résulte aisément la proposition suivante :

Soient α la courbe commune à une quadrique E *et à une sphère* S, *du centre* O; α_1 *une focale de α, située sur une quadrique* E_1, *homofocale à* E, *et sur une sphère* S_1, *de centre* O_1 : *le plan polaire de* O *par rapport à* E_1, *le plan polaire de* O_1 *par rapport à* E, *et le plan radical des sphères orthogonales* S *et* S_1 *coïncident.*

Il en résulte facilement qu'on ne peut, d'un point O comme centre, décrire qu'une seule sphère appartenant à un groupe donné σ_1, et le théorème précédent donne de suite le moyen de la construire.

Il existe une autre relation de position entre les courbes α et α_1.

La développable circonscrite à E_1 le long de la courbe α_1 est une développable du huitième ordre, ayant pour lignes doubles quatre coniques : on peut appeler *focales* d'une telle surface les droites par lesquelles on peut mener deux plans, tangents à la fois à cette développable et au cercle de l'infini. Il y a en général huit plans tangents à la développable et au cercle de l'infini, et par conséquent 28 focales. Cette définition est la même que celle des focales d'un cône.

Cela posé, remarquons que les plans tangents à E_1 et au cercle de l'infini touchent E_1 le long d'une courbe du quatrième ordre, rencontrant en huit points la sphère S_1, et par suite la courbe α_1. Il y a donc huit plans tangents à la fois à E_1, à la courbe α_1 et au cercle de l'infini. Or α_1 est focale de α, en d'autres termes, les plans tangents à α_1 et au cercle de l'infini touchent α; de même les plans tangents communs à E_1 et au cercle de l'infini touchent E.

Il en résulte que la développable circonscrite à E le long de α et celle circonscrite à E_1 le long de α_1 ont huit plans tangents communs et que ces plans touchent le cercle de l'infini : ces deux développables ont donc mêmes focales.

Ainsi :

La développable circonscrite à une quadrique le long d'une courbe sphérique et la développable circonscrite à une quadrique homofocale, le long d'une focale de cette courbe, sont homofocales.

Ces propositions restent évidemment vraies quand la sphère S se réduit à un plan ; on obtient alors les propriétés suivantes, qu'on aurait pu déduire d'un théorème démontré plus loin (n° 7) et dû à M. Darboux.

Les deux focales d'une conique (α) *tracée sur une quadrique* (E) *sont sur deux quadriques* (E_1) *et* (E_2), *homofocales à la proposée.*

Soient α_1 et α_2 ces deux focales :

Les cônes circonscrits aux quadriques E, E_1 *et* E_2 *respectivement le long des coniques* α, α_1 *et* α_2 *sont homofocaux.*

Ils ont donc en particulier même sommet.

Si l'on remarque que les plans parallèles à un plan donné P appartiennent à un même groupe par rapport à E, et que ce groupe reste le même quand P varie en restant tangent à un cône homocyclique à E, on voit que :

Les focales des coniques, situées à l'intersection d'une quadrique et d'une série de plans parallèles, restent sur deux quadriques, homofocales à la proposée.

Les coniques communes à une quadrique E *et à tous les plans parallèles aux plans tangents d'un même cône, homocyclique à cette surface, ont une de leurs focales sur une quadrique homofocale à* E.

Les axes des sections faites dans E par une série de plans parallèles entre eux décrivent deux plans ; par suite :

Les foyers des sections faites dans une surface du second

ordre E, *par une série de plans parallèles, décrivent deux coniques, situées sur deux quadriques homofocales à* E; *une de ces quadriques reste fixe si les plans sécants restent parallèles aux plans tangents d'un cône homocyclique à* E.

Remarque. — On sait que chacune des focales d'une courbe située à l'intersection d'une quadrique E et d'une sphère S coupe orthogonalement cette sphère en quatre points situés sur un cercle, et qu'on appelle *foyers associés* de la courbe sphérique.

Il résulte de ce qui précède que :

Par quatre foyers associés de la courbe commune à une quadrique E *et à une sphère* S, *passe une quadrique homofocale à la première et normale en ces points à la sphère* S.

D'un autre côté, une sphère est normale à une quadrique E en quatre points situés sur la conique polaire du centre de la sphère; il en résulte que :

Le lieu des foyers des courbes communes à une sphère fixe et à une série de quadriques homofocales coïncide avec le lieu des points où cette sphère est normale à ces quadriques.

Le lieu des foyers des courbes communes à une série de quadriques homofocales et à une série de sphères concentriques coïncide avec le lieu des points de contact des plans menés tangentiellement aux quadriques par le centre des sphères.

En particulier :

Le lieu des foyers des sections faites par un même plan dans une série de quadriques homofocales coïncide avec le lieu des pieds des normales à ces surfaces, contenues dans le plan.

Ce dernier lieu a été étudié par M. Chasles : c'est une courbe du troisième ordre. De même :

Le lieu des foyers des sections faites dans une série de quadriques homofocales par une série de plans parallèles entre eux coïncide avec le lieu des pieds des normales qu'on peut mener à ces quadriques parallèlement aux plans considérés.

5. Si l'on se reporte à un théorème donné au n° 2, on voit, comme plus haut, que :

Les centres des sphères de rayon donné, doublement tangentes à une courbe sphérique tracée sur une quadrique E, *décrivent quatre courbes sphériques du quatrième ordre; chacune d'elles est sur une quadrique concentrique et homothétique à une quadrique homofocale à* E.

Les autres théorèmes du numéro précédent se généraliseraient d'une manière analogue.

6. En vertu du théorème I, tout point a situé à l'intersection de E et d'une quadrique homofocale E_1 est le centre d'une sphère de rayon nul appartenant à un groupe σ_1 ; en d'autres termes, cette sphère coupe E suivant une courbe située sur un cône passant par la conique σ_1. Ce cône touche, comme on l'a dit, la quadrique E au point a; et, puisque les cercles communs à la sphère et aux plans tangents du cône sont des cercles bitangents à E, faisant partie du groupe σ_1, il en résulte que le cercle de rayon nul de centre a, situé dans le plan tangent à E au point a, pourra être considéré comme un cercle bitangent du groupe σ_1.

Par suite, toute sphère passant par ce cercle, c'est-à-dire toute sphère tangente en a à la quadrique E, appartiendra au groupe σ_1. Si de plus on remarque que par un point a de E passent deux quadriques homofocales à E, on voit que :

Toutes les sphères tangentes à une quadrique E *en un même point appartiennent à deux mêmes groupes.*

Toutes les sphères tangentes à une quadrique E *en tous les points d'une ligne de courbure appartiennent à un même groupe.*

Par suite :

Les sphères tangentes à une quadrique E *en tous les points d'une ligne de courbure coupent cette quadrique suivant des courbes qui ont une de leurs focales sur la quadrique homofocale à* E *qui contient la ligne de courbure considérée.*

Les sphères tangentes à une quadrique E *en un même point a ont deux de leurs focales situées respectivement sur les deux quadriques homofocales à* E *qui passent par le point a.*

On a vu que les sphères de rayon donné appartenant à un

même groupe ont leurs centres sur une quadrique, concentrique et homothétique à une surface homofocale à E; par suite :

Sur les normales menées à une quadrique E *le long d'une ligne de courbure située sur une surface homofocale* E_1, *portons de part et d'autre du pied une longueur constante : le lieu des points ainsi déterminés sera une courbe gauche, située sur une quadrique concentrique et homothétique à* E_1.

7. *Les sphères d'une même série, bitangentes à une quadrique* Q *inscrite dans une surface du second ordre* E, *appartiennent à un même groupe par rapport à* E.

Par sphères d'une même série bitangentes à Q, j'entends les sphères bitangentes qui ont leurs centres dans un même plan principal de Q.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que les cercles de Q, situés dans des plans parallèles entre eux, sont bitangents à E, et que la droite qui joint les deux points de contact a une direction fixe. Il en résulte que ces cercles, bitangents à E, appartiennent à un même groupe, et par suite que les sphères bitangentes à Q, qui contiennent un de ces cercles, font aussi partie d'un même groupe.

De là se déduisent immédiatement les propositions suivantes (théorème I) :

Les focales d'une quadrique inscrite dans une quadrique E *sont sur trois surfaces du second ordre, homofocales à* E. (Darboux.)

Les sphères d'une même série, bitangentes à une quadrique Q, *inscrite dans une surface du second ordre* E, *coupent cette dernière suivant des courbes qui ont une de leurs focales sur une même quadrique, homofocale à* E. *Cette quadrique contient la focale de* Q, *située dans le plan principal qui renferme les centres des sphères bitangentes considérées.*

Le théorème suivant, analogue à celui qu'on vient de démontrer, donne lieu à des conséquences analogues.

Les sphères inscrites à une surface de révolution du second

ordre bitangente à une quadrique appartiennent à un même groupe par rapport à cette quadrique.

Soit en effet S une de ces sphères, touchant la surface de révolution R suivant un cercle γ : ce cercle coupe les coniques α et β communes aux surfaces bitangentes R et E en des points a et b, a' et b'; et en ces points, en a et b par exemple, la tangente à la courbe d'intersection de S et de E coïncide avec la tangente à la conique α. En d'autres termes, le plan de cette conique touche en a et b la courbe commune à S et à E; cette courbe est donc sur un cône du second ordre H (homocyclique à E), passant par la droite ab. Or les plans des cercles γ ayant une même direction, il en est de même des droites ab, et les cônes H ont cinq points communs à l'infini : ils coupent donc le plan de l'infini suivant une même conique σ_1, et par suite les sphères S, inscrites à R, appartiennent à un même groupe par rapport à E.

On démontrerait, par des considérations analogues à celles qui précèdent et à celles du n° 7, les deux propositions suivantes, dans lesquelles on désigne par *cyclide* une surface quelconque ayant le cercle à l'infini pour ligne double.

Les sphères bitangentes à une cyclide forment cinq séries : les sphères d'une même série, bitangentes à une cyclide inscrite dans une quadrique E *suivant une courbe sphérique, appartiennent à un même groupe par rapport à* E.

Les sphères inscrites à une cyclide à deux points doubles, tangente en quatre points à une quadrique E, *appartiennent à un même groupe par rapport à cette quadrique.*

De ces propositions et du théorème démontré au commencement du n° 7, on déduit diverses conséquences relatives aux sphères appartenant à un même groupe par rapport à une quadrique E.

Proposons-nous, par exemple, de chercher l'enveloppe des sphères d'un groupe donné, et dont les centres sont dans un plan donné P.

Les quadriques inscrites à E et ayant P comme plan principal sont en nombre simplement infini; les sphères bitangentes à l'une d'elles appartiennent à un même groupe par rapport à E; on en conclut aisément, puisque d'un point donné comme centre on ne

peut décrire qu'une sphère d'un groupe donné, que l'enveloppe cherchée est une quadrique inscrite à E, ayant P pour plan principal.

Ainsi :

L'enveloppe des sphères appartenant à un même groupe par rapport à une quadrique E *et ayant leurs centres dans un plan donné est une quadrique symétrique par rapport à ce plan et inscrite à* E.

On verrait de même que :

Les sphères appartenant à un même groupe par rapport à E *et ayant leurs centres sur une droite donnée enveloppent une quadrique, de révolution autour de cette droite, et bitangente à* E.

L'enveloppe des sphères d'un même groupe par rapport à E *et orthogonales à une sphère donnée est une cyclide qui admet cette sphère pour sphère directrice, et qui touche* E *suivant une courbe sphérique.*

La sphère considérée peut avoir un rayon nul.

L'enveloppe des sphères d'un même groupe passant par un point est une cyclide qui a un point conique en ce point et qui touche E *suivant une courbe sphérique.*

L'enveloppe des sphères appartenant à un même groupe par rapport à E *et passant par deux points donnés est une cyclide qui a un point conique en chacun de ces points et qui touche la quadrique* E *en quatre points.*

8. La théorie du numéro précédent nous permet de traiter ce problème :

Construire une quadrique (Q), *inscrite à une quadrique donnée* (E) *et bitangente à deux sphères données,* S *et* S_1; *avec la condition que les centres de ces sphères,* o *et* o_1, *soient dans un même plan principal de* Q.

Les conditions imposées à la quadrique Q, ainsi définie, sont au nombre de neuf; néanmoins *le problème est généralement impossible;* il faut évidemment, pour qu'il le devienne, que les sphères S et S_1 appartiennent à un même groupe (n° 7). *Si cette*

condition est remplie, il y a une infinité de quadriques répondant à la question.

En effet, soit S_2 une troisième sphère, de centre o_2, appartenant au même groupe que S et S_1 : les sphères de ce groupe ayant leurs centres dans le plan oo_1o_2 enveloppent une quadrique qui répond à la question.

C'est là une *deuxième propriété générale des sphères d'un même groupe;* on peut l'énoncer ainsi :

On peut toujours construire une quadrique inscrite à une quadrique donnée E, *et bitangente à trois sphères appartenant à un même groupe par rapport à* E.

On voit de même que :

On peut toujours construire une quadrique bitangente à une quadrique donnée E *et inscrite à deux sphères appartenant à un même groupe par rapport à* E.

Si l'on remarque qu'une sphère S appartient à quatre groupes par rapport à E, on a la proposition suivante :

Les quadriques inscrites à une quadrique E *et bitangentes à une sphère* S *se partagent en quatre classes : les quadriques d'une même classe ont celle de leurs focales, dont le plan passe par le centre de la sphère* S, *située sur une même quadrique* E_1 *homofocale à* E.

Une des quatre quadriques E_1, *ainsi définies, reste fixe si la sphère considérée varie sans cesser d'appartenir à un même groupe par rapport à* E.

Ces quatre quadriques sont celles qui contiennent respectivement les quatre focales de la courbe commune à la quadrique E *et à la sphère* S.

De là résulte une conséquence intéressante :

Les quadriques d'une même classe, inscrite à la quadrique E *et bitangentes à la sphère* S, *ont leurs centres sur une surface du second ordre, lieu des centres des sections faites dans la quadrique* E_1, *par les plans issus du centre de la sphère.*

En transformant par homographie, on voit que :

Le lieu des centres des quadriques inscrites à une quadrique

donnée A *et bitangentes à une quadrique donnée* B *se décompose en quatre surfaces du second ordre, qui passent par les centres des deux premières.*

On démontrerait d'une manière analogue que :

Les quadriques de révolution bitangentes à une quadrique E *et inscrites à une sphère* S *se divisent en quatre classes : les quadriques d'une même classe ont leurs deux foyers sur une même quadrique* E_1, *homofocale à* E.

Les quatre quadriques E_1, *ainsi définies, sont celles qui contiennent respectivement les quatre focales de la courbe commune aux surfaces* E *et* S.

Ce sont donc celles que nous avons rencontrées tout à l'heure :

Le lieu des centres des quadriques d'une même classe, inscrites à la sphère S *et bitangentes à la quadrique* E, *est une surface du second ordre, lieu des milieux des cordes de la quadrique* E_1, *issues du centre de la sphère.*

Ce lieu est évidemment le même que celui des centres des sections faites dans E_1 par des plans issus du même point. Donc :

Le lieu des centres des quadriques inscrites à une quadrique A *et bitangentes à une autre quadrique* B *est le même que le lieu des centres des quadriques inscrites à* B *et bitangentes à* A.

Des conséquences d'un autre ordre sont relatives aux lignes doubles de la développable circonscrite à une quadrique E et à une sphère S.

Une telle développable a pour lignes doubles quatre coniques : un point m de l'une d'elles est le sommet d'un cône, H, circonscrit à E et bitangent à S. Or cette sphère appartient à quatre groupes, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 ; les sphères bitangentes au cône H, appartenant à la même série que S, feront donc partie d'un de ces groupes, en vertu du théorème démontré au commencement du n° 7. En particulier, la sphère de rayon nul, ayant pour centre le sommet m du cône, appartiendra à un de ces groupes, σ_1 par exemple, et le point m sera (théorème I) sur la quadrique E_1, homofocale à E, lieu des

centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1. On en déduit sans difficulté les théorèmes suivants :

Les quatre lignes doubles de la développable circonscrite à une quadrique E *et à une sphère sont sur quatre quadriques, homofocales à* E (Chasles). *Chacune de ces quadriques contient une des focales de la courbe commune à la surface* E *et à la sphère considérée.*

On a de plus cette *troisième propriété générale des sphères d'un même groupe.*

Les développables, circonscrites à une quadrique E *et à chacune des sphères appartenant à un groupe donné par rapport à cette quadrique, ont une de leurs lignes doubles sur une même quadrique, homofocale à* E, *qui contient également une des focales des courbes communes à la quadrique* E *et aux sphères considérées.*

En particulier :

Les développables circonscrites à une quadrique et aux différentes sphères qui passent par un même cercle bitangent à cette surface ont une de leurs lignes doubles sur une même quadrique, homofocale à la proposée.

Les théorèmes des n°s 7 et 8 permettent évidemment de donner à cette proposition générale plusieurs formes différentes.

9. Considérons un cercle bitangent du groupe σ_1, touchant E aux points a et b, et par ce cercle menons une sphère S, tangente à E en un point m différent des points a et b : la sphère S coupe E suivant une courbe ayant un point double en m, et située sur un cône H, passant par la conique σ_1. Ce cône (dont le sommet est sur la droite ab) est donc tangent à E au point m. En d'autres termes, le plan tangent à E au point m touche la conique σ_1; m est donc (n° 3) sur la ligne de courbure commune à E et à la quadrique homofocale E_1, lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1. De là résulte ce théorème, qui exprime une *propriété générale des cercles bitangents d'un même groupe :*

Par tous les cercles bitangents à une quadrique E *et appar-*

tenant à un groupe donné, menons des sphères tangentes à E; *les points de contact sont sur une même ligne de courbure de cette quadrique* (¹).

On suppose que la sphère menée par un cercle bitangent touche E en un point non situé sur ce cercle.

Comme on l'a dit plus haut (nº 4), toute courbe sphérique tracée sur E admet quatre séries de cercles bitangents, et les cercles d'une même série font partie d'un même groupe; donc :

Les sphères d'une même série, bitangentes à une courbe sphérique tracée sur une quadrique et simplement tangentes à cette surface la touchent suivant une ligne de courbure.

La courbe sphérique peut se réduire à deux cercles, dont l'un peut être de rayon nul :

Les sphères d'une même série, tangentes à deux cercles situés sur une quadrique, et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant une ligne de courbure.

De même, pour *les sphères passant par un ombilic et tangentes à un cercle situé sur la quadrique.....*

On suppose que les deux cercles considérés sont une même sphère.

La courbe sphérique peut devenir plane ; il n'y a plus alors que deux séries de sphères bitangentes.

Les sphères d'une même série, bitangentes à une conique située sur une quadrique et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant une ligne de courbure, qui passe par les extrémités du diamètre conjugué du plan de la conique.

Les sphères d'une même série tangentes aux deux génératrices qui passent par un point a d'une quadrique, et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant une ligne de courbure passant par a.

On peut compléter ces résultats comme il suit :

(¹) Rappelons, pour faciliter l'interprétation géométrique de ce théorème, que les cercles bitangents d'un même groupe sont ceux qui touchent la quadrique E en deux points *a* et *b*, tels que les droites *ab* soient parallèles aux génératrices d'un cône homocyclique à E.



On a montré que le point de contact, m, avec E, d'une sphère passant par un cercle d'une groupe donné, tangent à E aux points a et b, est sur une ligne de courbure fixe de E : *Cette ligne de courbure est normale en* m *au cercle qui passe par les points* a, b, m.

10. On peut se proposer d'étudier les lignes de courbure d'une quadrique dans la Géométrie de M. Cayley ; nous n'envisagerons qu'un cas particulier de ce problème, et nous arriverons ainsi à une extension simple des résultats obtenus plus haut. — Étant donnée une conique α, on appelle normale (par rapport à α), en un point a d'une surface E, la droite qui joint a au pôle, par rapport à la conique α, du plan tangent à la surface au point a.

Les lignes de courbure, dans cette géométrie, sont alors des courbes telles, que les normales à E en tous leurs points forment une surface développable.

Dans la géométrie ordinaire, la conique α est le cercle de l'infini.

Le théorème du n° 3 transformé par homographie peut, d'après cela, s'énoncer ainsi :

Soit α *la conique prise pour conique absolue : les plans tangents menés à une surface du second ordre* E, *le long d'une ligne de courbure (par rapport à* α*), touchent une conique* β, *située dans le plan de la conique* α, *et passant par les quatre points communs à* E *et à* α.

En d'autres termes :

Les lignes de courbure d'une quadrique, par rapport à deux coniques coupant cette surface aux mêmes points, coïncident.

Par suite :

Les lignes de courbure d'une quadrique, par rapport à une conique quelconque passant par les points communs au cercle de l'infini et à la quadrique, coïncident avec les lignes de courbure ordinaires de cette surface.

Ce théorème peut s'énoncer ainsi, si l'on remarque que les lignes de courbure de E par rapport à une conique α sont sur les

quadriques inscrites dans la développable circonscrite à E et à α :

Soit la développable circonscrite à une surface du second ordre le long d'une ligne de courbure : toute surface du second ordre inscrite dans cette développable coupe la première suivant une nouvelle ligne de courbure.

En s'appuyant sur ces résultats et en transformant par homographie certains théorèmes des paragraphes précédents, on arrive sans difficulté aux conséquences suivantes :

Soient deux cônes du second ordre H_1 *et* H_2, *homocycliques à une quadrique* E : *si deux cônes parallèles aux deux premiers* K_1 *et* K_2, *se coupent sur la quadrique, leurs sommets sont respectivement sur deux surfaces du second ordre* E_1 *et* E_2, *concentriques à la surface* E *et la coupant suivant deux lignes de courbure.*

Les plans tangents à E *le long de la ligne de courbure située sur* E_1 *sont parallèles aux plans tangents du cône* H_2 *et touchent la quadrique* E_2 ; *de même les plans tangents le long de la ligne de courbure située sur* E_2 *sont parallèles à ceux de* H_1 *et touchent la quadrique* E_1.

Soit H *un cône homocyclique à une quadrique* E : *les quadriques asymptotiques à ce cône, bitangentes à une courbe sphérique tracée sur* E *et simplement tangentes à cette surface, forment quatre séries, et les quadriques d'une même série touchent* E *suivant une ligne de courbure : cette ligne reste fixe si le cône* H *varie, la courbe sphérique considérée demeurant la même.*

Par suite :

Les quadriques homocycliques à une quadrique E, *bitangentes à une courbe sphérique tracée sur* E *et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant quatre lignes de courbure.*

Les quadriques homocycliques à une quadrique E, *bitangentes à une conique tracée sur* E *et simplement tangentes à cette surface, forment deux séries : les quadriques d'une même série touchent* E *le long d'une ligne de courbure, qui passe par*

les extrémités du diamètre conjugué du plan de la section considérée.

Les quadriques homocycliques à une quadrique E, *tangentes aux deux génératrices qui passent par un point a, de* E *et tangentes à cette surface, forment deux séries : les quadriques d'une même série touchent* E *le long d'une des lignes de courbure qui passent par le point a.*

Dans ces énoncés, on suppose que les quadriques homocycliques considérées touchent E en un point non situé sur la courbe sphérique ou plane à laquelle elles sont bitangentes.

Soit H *un cône homocyclique à une quadrique* E : *les cônes parallèles à* H *qui sont doublement tangents à une courbe sphérique* (*ou plane*) *tracée sur* E *forment quatre* (*ou deux*) *séries : les sommets des cônes d'une même série décrivent une quadrique qui coupe la surface* E *suivant une ligne de courbure.*

Aux coniques communes à une surface du second ordre E *et à une série de plans parallèles à un plan* P, *circonscrivons des losanges, dont les côtés soient parallèles à deux directions données ; les sommets de ces losanges décrivent deux coniques.*

Une de ces coniques engendre une surface du second ordre, coupant E *suivant une ligne de courbure, si* P *varie en restant parallèle aux plans tangents d'un cône homocyclique à la quadrique* E.

En particulier, ces deux propositions s'appliquent aux sommets des carrés circonscrits aux sections faites dans une quadrique par les plans parallèles à un plan P.

Les lignes doubles de la développable circonscrite à une quadrique E *et à une quadrique quelconque homocyclique sont quatre coniques, dont chacune coupe* E *en quatre points situés sur une même ligne de courbure,* etc.

11. On déduit des considérations géométriques qui précèdent une solution simple de la question suivante :

Trouver les transformations homographiques qui conservent les lignes de courbure d'une quadrique E, c'est-à-dire qui font correspondre aux lignes de courbure de la quadrique E les lignes de courbure de la transformée E'.

Remarquons d'abord que les lignes de courbure de E sont encore des lignes de courbure quand on prend pour conique absolue une des trois coniques focales de E : cela résulte de ce que ces focales sont des lignes doubles de la développable circonscrite à E et au cercle de l'infini. Par suite, les lignes de courbure de E sont encore des lignes de courbure quand on prend pour conique absolue une conique quelconque passant par les quatre points communs à E et à une de ses focales. (Pour simplifier le langage, je regarderai le cercle de l'infini comme une focale de E, et les quatre points où il coupe E comme des ombilics). Il est clair qu'aucune conique autre que celles-là ne jouit de la même propriété.

Par conséquent, les lignes de courbure de E deviendront des lignes de courbure de E′ si quatre ombilics de E situés dans un même plan ont pour transformés quatre ombilics de E′ : si cette condition est remplie, à tous les ombilics de E correspondront des ombilics de E′.

Ainsi :

Pour qu'une transformation homographique conserve les lignes de courbure d'une quadrique, il faut et il suffit qu'elle conserve les ombilics.

Cela posé, il y a deux cas à distinguer :

1° Les ombilics à l'infini se correspondent dans les deux surfaces E et E′.

Transportons dans l'espace la surface E′, de manière à faire coïncider ses plans principaux avec ceux de E, pris pour plans de coordonnées; on pourra évidemment faire en sorte que les ombilics de E′ situés dans un de ces plans correspondent aux ombilics de E situés dans le même plan.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=t^2,\quad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=t'^2$$

les équations de E et de E′.

La transformation cherchée sera, d'après ce qui précède, de la forme

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x,\\ y' &= \mu y,\\ z &= \nu z',\\ t' &= t. \end{aligned}$$

puisqu'elle laisse inaltérés les plans de coordonnées et le plan de l'infini.

Pour que les ombilics à l'infini se correspondent dans les surfaces E et E', il faut qu'on ait identiquement

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

α et β étant deux constantes; on en tire

$$\lambda^2 = \alpha + \frac{\beta}{a^2},$$

$$\mu^2 = \alpha + \frac{\beta}{b^2},$$

$$\nu^2 = \alpha + \frac{\beta}{c^2}.$$

D'un autre côté, on a

$$a'^2 = a^2\lambda^2, \quad b'^2 = b^2\mu^2, \quad c'^2 = c^2\nu^2$$

et, par suite,

$$a'^2 = \beta + \alpha a^2 = \alpha(a^2 + \gamma),$$

$$b'^2 = \beta + \alpha b^2 = \alpha(b^2 + \gamma),$$

$$c'^2 = \beta + \alpha c^2 = \alpha(c^2 + \gamma),$$

en posant $\alpha\gamma = \beta$, équations qui montrent que E' est homothétique à une quadrique homofocale à E.

2° Les ombilics à l'infini ne se correspondent pas.

En ce cas, on peut faire coïncider les plans principaux des surfaces E et E', de façon que les ombilics situés dans les plans $x = 0$, $y = 0$, se correspondent, et que les ombilics de E (ou E'), situés dans le plan $z = 0$, correspondent à ceux à l'infini de E' (ou E).

La transformation est alors de la forme

$$x' = \lambda x, \quad y' = \mu y, \quad z' = \nu t, \quad t' = \varpi z.$$

Il faut qu'on ait identiquement

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \alpha\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} - t^2\right) + \beta\left(\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - t^2\right),$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2 = \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{a^2 - c^2},$$

$$\mu^2 = \frac{\alpha}{b^2} + \frac{\beta}{b^2 - c^2},$$

$$\nu^2 = -\alpha - \beta.$$

On a d'ailleurs

$$a^2\lambda^2 = -\frac{a'^2\nu^2}{c'^2},$$

$$b^2\mu^2 = -\frac{b'^2\nu^2}{c'^2},$$

$$c^2\varpi^2 = -\frac{\nu^2}{c'^2}.$$

En éliminant λ, μ, ν, ϖ, α et β entre les six relations précédentes, on trouve l'équation

$$o = \begin{vmatrix} a'^2 & b^2 & 1 \\ b'^2 & a^2 & 1 \\ c'^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix};$$

d'où l'on tire, α' et γ' étant des constantes,

$$a'^2 = \alpha'(b^2 + \gamma'), \quad b'^2 = \alpha'(a^2 + \gamma'), \quad c'^2 = \alpha'(c^2 + \gamma').$$

On en conclut, comme plus haut, que E' est homothétique à uue quadrique homofocale à la surface

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = t^2,$$

qui est égale à la surface E.

Donc enfin :

Pour qu'on puisse établir entre deux quadriques une relation homographique transformant les lignes de courbure de l'une en des lignes de courbure de l'autre, il faut et il suffit que chacune d'elles soit semblable à une quadrique homofocale à l'autre.

Il y aura alors deux types de transformations homographiques répondant à la question.

12. On peut établir pour les coniques planes (ou sphériques) homofocales une théorie analogue à celle qui précède.

Nous nous bornerons à énoncer dans le cas des coniques planes les définitions et les résultats principaux auxquels on arrive ainsi.

On sait que les bissectrices d'un système de cordes communes à une conique et à un cercle sont parallèles aux axes de la conique : nous dirons qu'*un cercle fait partie d'un groupe* α par rapport



à une conique, si une des cordes communes au cercle et à la conique fait avec le grand axe de cette dernière un angle égal à α ou à $(-\alpha)$.

Le lieu des centres des cercles de rayon nul appartenant à un même groupe par rapport à une conique λ *est une conique homofocale.*

Les cercles d'une même série, bitangents à une conique μ, *inscrite dans une conique* λ, *appartiennent à un même groupe par rapport à cette dernière;* et par suite : *deux foyers associés de* μ *sont sur une conique homofocale à* λ.

Par foyers associés, j'entends les foyers situés sur un même axe de la conique.

On peut construire une conique μ, *bitangente à une conique donnée* λ, *et à deux cercles appartenant à un même groupe par rapport à* λ; *la ligne des centres de ces cercles est un axe de la conique* μ.

Les coniques bitangentes à une conique λ *et à un cercle donnés se partagent en trois classes : les coniques d'une même classe ont deux foyers associés sur une même conique homofocale à* λ.

Ces foyers sont ceux situés sur l'axe passant par le centre du cercle.

Une des trois coniques homofocales à λ *ainsi définies reste fixe si le cercle donné varie, sans cesser de faire partie d'un même groupe par rapport à* λ.

Si l'on circonscrit un quadrilatère à une conique λ *et à un cercle, les sommets opposés de ce quadrilatère sont deux à deux sur trois coniques homofocales à* λ (Chasles).

Une de ces coniques reste fixe si le cercle considéré varie sans cesser de faire partie d'un même groupe par rapport à λ.

Donc :

Les quadrilatères circonscrits à une conique λ *et à chacun des cercles appartenant à un même groupe par rapport à cette conique ont deux sommets opposés sur une même conique, homofocale à* λ.

On peut donner à ce théorème diverses formes et retrouver des propositions connues, en considérant par exemple les cercles tangents à λ en un même point, etc.

Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières; *par* D. Sélivanoff.

(Séance du 2 avril 1885.)

Soit

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1} x + c_n$$

un polynôme quelconque à coefficients entiers.

Nous nous proposons de trouver les diviseurs de $f(x)$ à coefficients entiers.

La recherche des diviseurs du premier degré est bien connue. Il est souvent utile dans cette recherche d'avoir en vue la remarque suivante, due à Gauss.

Si

$$f(x) = (x - a)\psi(x),$$

on a de même

$$f(x) \equiv (x - a)\psi(x) \pmod{n},$$

n désignant un nombre entier quelconque.

En posant $x = a$, on obtient

$$f(a) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Si la dernière congruence a lieu, on a

$$f(x) \equiv f(x) - f(a) \pmod{n}$$

ou

$$f(x) \equiv x^n - a^n + c_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + c_{n-1}(x - a) \pmod{n}.$$

Chaque différence étant algébriquement divisible par $x - a$, on aura

$$f(x) \equiv (x - a)\psi(x) \pmod{n},$$

$$\psi(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a} + c_1 \frac{x^{n-1} - a^{n-1}}{x - a} + \ldots + c_{n-1}.$$

Les deux congruences considérées sont donc identiques.

Si aucun des nombres

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(n-1)$$

n'est multiple de n, il est impossible que

$$f(a) \equiv 0 \pmod{n},$$

car

$$f(a) \equiv f(b), \quad \text{si} \quad a \equiv b \pmod{n}.$$

Dans ce cas la fonction $f(x)$ ne peut avoir des diviseurs du premier degré.

Si, parmi les nombres nommés, $f(1)$ est le seul divisible par n, on conclut

$$f(x) \equiv (x-1)\psi(x) \pmod{n}.$$

La fonction $f(x)$ peut admettre un diviseur $x - a$, mais il est nécessaire, dans ce cas, que

$$a \equiv 1 \pmod{n}.$$

Passons maintenant à la recherche des diviseurs de second degré de la forme

$$\varphi(x) = x^2 + ax + b.$$

On peut suivre la méthode dont quelques points importants m'ont été indiqués par mon ami M. Runge.

On détermine d'abord la limite supérieure des modules des racines de l'équation $f(x) = 0$. Soit ρ cette limite.

Ce nombre peut être déterminé par les conditions

$$\mathfrak{F}(\rho) > 0, \quad \mathfrak{F}(\rho - 1) < 0,$$

où

$$\mathfrak{F}(x) = x^n - |c_1|x^{n-1} - |c_2|x^{n-2} - \ldots - |c_{n-1}|x - |c_n|,$$

ρ étant un nombre entier et le signe $|a|$ désignant le module de a.

Supposons que

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x), \quad \varphi(x) = x^2 + ax + b;$$

on doit avoir

$$|a| < 2\rho, \quad |b| < \rho^2,$$

car a est la somme de deux certaines racines de l'équation $f(x) = 0$, b leur produit.

En posant $x = 0$, on trouve

$$c_n = b\psi(0);$$

donc b est nécessairement diviseur de c_n.

En prenant pour x un nombre entier g, nous obtiendrons

$$f(g) = \varphi(g)\psi(g).$$

Le nombre

$$\varphi(g) = g^2 + ag + b$$

est donc diviseur du nombre $f(g)$.

Pour résoudre le problème, on représente les diviseurs de $f(g)$ sous la forme

$$g^2 + ag + b$$

de toutes les manières possibles, les coefficients a et b devant remplir les conditions indiquées.

En remplaçant g par x, on obtient des fonctions parmi lesquelles sont nécessairement contenus les diviseurs quadratiques de $f(x)$, s'il en existe de tels.

M. Hermite, à qui j'ai communiqué les principes de cette méthode, a bien voulu me faire l'observation suivante :

On peut se demander si, à d'autres points de vue, par exemple au moyen des congruences, en prenant hardiment pour modules divers nombres premiers, on n'arriverait point plus vite au but.

En étudiant la théorie des fonctions irréductibles suivant un module premier, j'ai reconnu tout l'avantage qu'offre la considération des congruences dans la recherche des diviseurs. On connaît le nombre de ces fonctions (Serret, *Algèbre supérieure*, § 349), et il est facile de les former pour les degrés peu élevés.

Par rapport au module 2, il n'y a qu'une seule fonction irréductible du second degré

$$x^2 + x + 1,$$

et deux fonctions du troisième degré

$$x^3 + x^2 + 1, \quad x^3 + x + 1.$$

Pour le module 3, on a trois fonctions du second degré

$$x^2 + 1, \quad x^2 - x - 1, \quad x^2 + x - 1$$

et huit fonctions du troisième degré

$$x^3 - x - 1,\quad x^3 - x + 1,\quad x^3 + x^2 - 1,\quad x^3 - x^2 + 1,$$
$$x^3 - x^2 + x + 1,\quad x^3 + x^2 - x + 1,\quad x^3 - x^2 - x - 1,\quad x^3 + x^2 + x - 1.$$

En divisant la fonction proposée $f(x)$ par ces fonctions, on reconnaît quels sont les diviseurs de $f(x)$ du second et du troisième degré par rapport aux modules 2 et 3.

Si, par exemple,

$$f(x) \equiv (x^2 - x - 1)\psi(x) \pmod 3$$

et si $f(x)$ n'admet pas d'autres diviseurs suivant le module 3, on conclut que, parmi les fonctions

$$x^2 + ax + b,$$

obtenues par la méthode précédente, on ne doit retenir que celles où

$$a \equiv -1,\quad b \equiv -1 \pmod 3.$$

Prenons quelques exemples :

1. On recherche les diviseurs de la fonction

$$f(x) = x^5 - 10x^4 - 32x^3 + 7x^2 - 500x - 120.$$

Cette fonction se trouve dans l'Ouvrage de M. Laguerre (*Note sur la résolution des équations numériques*, p. 7; 1880).

En réduisant les coefficients par rapport au module 2, on obtient

$$f(x) \equiv x^2(x^3 + 1) \pmod 2.$$

La fonction $f(x)$ est modulo 2 divisible par $x + 1$, car

$$f(1) \equiv 0 \pmod 2,$$

d'où

$$f(x) \equiv x^2(x + 1)(x^2 + x + 1) \pmod 2.$$

Passons au module 3. Les coefficients peuvent être réduits à 0, 1 et -1. On obtient

$$f(x) \equiv x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x \pmod 3.$$

En remarquant que

$$f(0) \equiv 0,\quad f(1) \equiv 0,\quad f(-1) \equiv 0 \pmod 3,$$

on trouve

$$f(x) \equiv x(x-1)(x+1)(x^2-x-1) \pmod{3}.$$

Prenons encore 5 pour module,

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \equiv x^5 - 2x^3 + 2x^2, \\ f(0) \equiv 0, \quad f(1) \equiv 1, \quad f(-1) \equiv -2, \quad f(2) \equiv -2, \quad f(-2) \equiv 2 \end{array}\right\} \pmod{5}.$$

La fonction $f(x)$ n'admet aucun diviseur du premier degré, excepté x suivant le module 5.

On obtient la décomposition en facteurs irréductibles

$$f(x) \equiv x^2(x^3 - 2x + 2) \pmod{5}.$$

Supposons qu'on ait

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x), \quad \varphi(x) = x - a,$$

il est nécessaire que

$$a \equiv 0 \pmod{5}.$$

Pour $x = 1$, on trouve

$$f(1) = -2.3.109.$$

Le module des racines de l'équation $f(x) = 0$ étant inférieur à 13,

$$|\varphi(1)| < 14.$$

De la congruence

$$\varphi(x) \equiv x \pmod{5}$$

résulte

$$\varphi(1) \equiv 1 \pmod{5}.$$

On doit avoir

$$\varphi(1) = 1,$$

car $\varphi(1)$ est diviseur de $f(1)$.

Mais

$$\varphi(1) = 1 - a,$$

d'où

$$a = 0,$$

ce qui est impossible, car $f(10)$ est différent de zéro.

La fonction $f(x)$ ne peut donc avoir des diviseurs du premier degré.

Supposons maintenant qu'on ait

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x), \quad \varphi(x) = x^2 + ax + b.$$

Comme les modules des racines de l'équation $f(x) = 0$ sont inférieurs à 13, on a

$$|a| < 26, \quad |b| \leq 120,$$

$$\varphi(13) < 13^2 + 26.13 + 120 \quad \text{ou} \quad \varphi(13) < 627.$$

On a encore

$$\varphi(13) > 0,$$

car les racines positives de $f(x) = 0$ sont inférieures à 13.

Le nombre $\varphi(13)$ est diviseur de

$$f(23) = 2.3.1657,$$

et, par conséquent, il ne peut avoir que les valeurs suivantes :

$$\varphi(13) = 1, \ 2, \ 3, \ 6.$$

Il résulte de la relation

$$f(x) \equiv x^2(x^3 - 2x + 2) \pmod 5$$

que

$$\varphi(x) \equiv x^2 \pmod 5$$

et

$$\varphi(13) \equiv \varphi(-2) \equiv -1) \pmod 5).$$

Les nombres 1, 2, 3, 6 ne sont pas congrus — 1 module 6; d'où il suit que la fonction $f(x)$ est irréductible,

$$(2) \qquad f(x) = x^5 - 5x^4 + 21x^3 - 28x^2 + 29x - 70.$$

En effectuant les mêmes calculs, on trouve

$$f(x) \equiv x(x+1)(x^3 + x + 1) \pmod 2),$$
$$f(x) \equiv (x^2 + 1)(x^3 + x^2 - x + 1) \pmod 3).$$

La fonction $f(x)$ n'a pas de diviseurs du premier degré. Cherchons les diviseurs du second degré

$$\varphi(x) = x^2 + ax + b,$$
$$\rho = 9,$$
$$f(9) = \varphi(9)\psi(9) = 2^6.619.$$
$$\varphi(9) < 9^2 + 18.9 + 70 = 313,$$
$$\psi(9) < 9^3 + 3.9.9^2 + 3.9^2.9 + 70 = 5173,$$

$$313 > \varphi(9) > \tfrac{5173}{313},$$

$$313 > \varphi(9) > 7.$$

$$\varphi(x) \equiv x^2 + x \pmod 2, \quad \varphi(x) \equiv x^2 + 1 \pmod 3,$$

$$\varphi(9) \equiv 0 \pmod 2, \qquad \varphi(9) \equiv 1 \pmod 3,$$

$$\varphi(9) = 16,\ 64.$$

Il faut représenter maintenant ces valeurs de $\varphi(9)$ sous la forme

$$9^2 + 9a + b,$$

que nous désignerons pour abréger par

$$(1,\ a,\ b).$$

Ayant une représentation

$$(1,\ a',\ b'),$$

on obtient toutes les autres en posant

$$a = a' - t, \quad b = b' + 9t,$$

t désignant un nombre entier quelconque.

Les valeurs de a et b doivent remplir les conditions

$$|a| < 18, \quad a \equiv 1 \pmod 2, \quad a \equiv 0 \pmod 3,$$

$$70 \equiv 0 \pmod 6, \quad b \equiv 0 \pmod 2, \quad b = 1 \pmod 3.$$

Les diviseurs pairs de 70 sont

$$2,\ 10,\ 14,\ 70.$$

b peut avoir les valeurs	-2,	10,	-14,	70
Leurs restes module 9.............	-2,	1,	4,	-2

$$16 = (1,\ -9,\ 16),$$

$$b = 16 + 9t = -2,\ 70, \quad t = -2,\ 6,$$

$$a = -9 - t = -7,\ -15,$$

$$\varphi(1) = 1 + a + b = »,\ 2^3.7, \quad f(1) = 2^2, 11.$$

$\varphi(1)$ n'étant pas diviseur de $f(1)$, la valeur

$$\varphi(x) = x^2 - 15x + 70$$

est inadmissible :

$$64 = (1,\ -9,\ 64),$$

$$b = 64 + 9t = 10, \quad t = -6,$$

$$a = -9 - t = -3.$$

On obtient une seule fonction

$$\varphi(x) = x^2 - 3x + 10$$

pouvant être diviseur de $f(x)$. Exécutant la division, on trouve

$$f(x) = (x^2 - 3x - 10)(x^3 - 2x^2 + 5x + 5x + 7).$$

La recherche des diviseurs devient plus simple si l'équation $f(x) = 0$ a des racines égales.

L'application du procédé du plus grand commun diviseur est souvent impraticable à cause des grands coefficients qui apparaissent dans les divisions successives.

Quelques exemples suffisent pour faire voir quels bons services rend dans ce cas la considération des congruences.

3. Soit

$$f(x) = x^7 + x^6 - 5x^5 + 24x^4 - 38x^3 + 53x^2 - 36x + 20.$$

Après avoir reconnu que $f(x)$ n'a pas de diviseurs du premier degré, supposons qu'on ait

$$f(x) = \varphi(x)^2\psi(x), \quad \varphi(x) = x^2 + ax + b.$$

En prenant 2 pour module, on trouve

$$f(x) \equiv x^7 + x^6 + x^5 + x^2 \pmod 2, \quad f'(x) \equiv x^6 + x^4 \pmod 2,$$

$f'(x)$ étant la dérivée de $f(x)$.

En remarquant que

$$\mathfrak{F}(x^2) \equiv \mathfrak{F}(x)^2 \pmod 2,$$

on a

$$f'(x) \equiv x^2(x+1)^4 \pmod 2.$$

La fonction $f(x)$ est modulo 2 divisible par $x+1$, car

$$f(1) \equiv 0 \pmod 2.$$

Donc

$$\varphi(x) \equiv x^2 + x \pmod 2.$$

En prenant 3 pour module, on trouve

$$f(x) \equiv x^7 + x^6 + x^5 + x^3 - x^2 - 1, \quad f'(x) \equiv x(x^5 - x^3 + 1) \pmod 3.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur des fonctions $f(x)$ et $\frac{1}{x} f'(x)$.

Dans les divisions successives, il convient de remplacer les coefficients par o, 1 et —1. On obtient

$$\varphi(x) \equiv x^2 - x - 1 \pmod{3}.$$

Prenons encore pour module le nombre 11,

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\equiv x^7 + x^6 - 5x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 3x - 2 \\ f'(x) &\equiv - 4x^6 - 5x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 4x - 3 \end{aligned}\right\} \pmod{11}.$$

Sans altérer le plus grand commun diviseur des fonctions $f(x)$ et $f'(x)$, on peut multiplier $f'(x)$ par (-3) afin de rendre le coefficient de x^6 égal à 1. On trouve

$$-3f'(x) \equiv x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2 \pmod{11}.$$

En effectuant les divisions successives, on obtient le résultat suivant :

$$\varphi(x) \equiv x^2 - x + 2 \pmod{11}.$$

La limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, que nous désignerons par r, étant égale à 2,

$$\varphi(2) > 0.$$

Les congruences obtenues permettent de conclure que

$$\varphi(2) \equiv 0 \pmod{2}, \quad \varphi(2) \equiv 1 \pmod{3}, \quad \varphi(2) \equiv 4 \pmod{11}.$$

Mais, comme $\varphi(2)^2$ doit être diviseur de

$$f(2) = 2^4.17,$$

on a

$$\varphi(2) = 4.$$

Ayant une représentation

$$4 = 2^2 = (1, 0, 0),$$

on trouvera toutes les autres

$$4 = 2^2 + 2a + b = (1, a, b)$$

au moyen des formules

$$a = -t, \quad b = 2t,$$

t étant un nombre entier quelconque.

Le nombre b est un diviseur de 20 assujetti aux conditions

$$b \equiv 0 \pmod 2, \quad b \equiv -1 \pmod 3, \quad b \equiv 2 \pmod{11}.$$

Les diviseurs pairs de 20 sont........	2,	4,	10,	20
Leurs restes modulo 3...............	−1,	1,	1,	−1
Leurs restes modulo 11.............	2,	4,	−1,	−2

b doit avoir la valeur

$$b = 2,$$

et, par conséquent,

$$t = 1, \quad a = -1.$$

Essayant de prendre

$$\varphi(x) = x^2 - x + 2,$$

on trouve

$$f(x) = (x^2 - x + 2)^2(x^3 + 3x - 4x + 5),$$

$$(4) \quad f(x) = x^7 + x^6 - 14x^5 + 13x^4 + 57x^3 - 149x^2 + 120x - 25.$$

En effectuant les mêmes calculs, on trouve

$$\varphi(x) \equiv x^2 + 1 \pmod 2, \quad \varphi(x) \equiv x - x^2 + 1 \pmod 3,$$
$$\varphi(x) \equiv x^2 + 2x \pmod 5,$$
$$r = 4,$$
$$f(5) = 2^2.3^3.5^2.23,$$
$$\varphi(5) \equiv 0 \pmod 2, \quad \varphi(5) \equiv 0 \pmod 3, \quad \varphi(5) \equiv 0 \pmod 5,$$
$$\varphi(5) = 30,$$
$$30 = (1, -5, 30).$$

Les diviseurs de 25 multiples de 5 sont..........	5,	25
Leurs restes modulo 2.........................	1,	1
Leurs restes modulo 3.........................	−1,	1

$$b = 30 + 5t = -5,\ 25; \quad t = -7,\ -1,$$
$$a = -5 - t = 2,\ -4,$$
$$-4 \text{ n'est pas } \equiv 2 \pmod 5,$$
$$\varphi(x) = x^2 + 2x - 5,$$
$$f(x) = (x^2 + 2x - 5)^2(x^3 - 3x^2 + 4x - 1).$$

En dernier lieu, nous ferons voir que la recherche des diviseurs du troisième degré peut être effectuée de la même manière

$$(5) \quad f(x) = x^7 - x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 48x^2 - 127x + 35,$$

$$f(x) \equiv x^7 + x^6 + x^5 + x + 1, \quad f'(x) \equiv x^6 + x^4 + 1 \equiv (x^3 + x^2 + 1)^2 \pmod 2.$$

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription : les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XIII. — N° 5.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1885

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine* banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.



Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

La fonction $f(x)$ n'a pas de diviseurs linéaires, car les valeurs $f(0)$ et $f(1)$ sont impaires.

La fonction x^3+x^2+1 ne divise pas $f(x)$ suivant le module 2 : donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de racines égales.

En exécutant la division de $x^7+x^6+x^5+x+1$ par x^2+x+1, on reconnaît que $f(x)$ n'a pas des diviseurs du second degré, car il n'y en a pas suivant le module 2.

En divisant $f(x)$ par les fonctions irréductibles du troisième degré suivant le module 2 (p. 5), on trouve

$$f(x)\equiv x^3+x+1)(x^4+x^3+1) \pmod 2.$$

Prenons le nombre 3 pour module

$$f(x)\equiv x^7-x^6-x^3-x-1 \pmod 3.$$

Cherchons d'abord les diviseurs du premier degré. On trouve

$$f(x)\equiv(x-1)^3(x^4-x^3+x+1) \pmod 3.$$

Mais

$$(x-1)^3\equiv x^3-1 \pmod 3,$$

d'où il suit

$$f(x)\equiv(x^3-1)(x^4-x^3+x+1).$$

La fonction x^4-x^3+x+1 est irréductible suivant le module 3, comme il est facile de s'en convaincre (p. 5).

Supposons maintenant qu'on ait

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x),\quad \varphi(x)=x^3+ax^2+bx+c.$$

La limite supérieure des modules des racines étant 4,

$$|a|<12,\quad |b|<48.$$

Nous savons encore que

$$\varphi(x)\equiv x^3+x+1 \pmod 2,\quad \varphi(x)\equiv x^3-1 \pmod 3.$$

La limite supérieure des racines positives est égale à 2, d'où il suit

$$\varphi(3)>0.$$

Il résulte de nos congruences

$$\varphi(3)\equiv 1 \pmod 2,\quad \varphi(3)\equiv -1 \pmod 3.$$

Le nombre $\varphi(3)$ est diviseur de

$$f(3) = 2813 = 29.97,$$

$$\varphi(3) < 3^3 + 12.3^2 + 48.3 + 35 = 314,$$

$$\psi(3) < 3^4 + 4.4.3^3 + 6.4^2.3^2 + 4.4^3 3 + 35 = 1988,$$

$$\varphi(3) > \tfrac{2813}{1988} \quad \text{ou} \quad \varphi(3) > 1.$$

Donc $\varphi(3)$ doit être un diviseur impair de $f(3)$ compris entre 1 et 314 congru à -1 module 3. On conclut

$$\varphi(3) = 29.$$

Ce nombre doit être mis sous la forme

$$3^3 + 3^2 a + 3b + c = (1, a, b, c).$$

Supposons qu'on ait

$$(1, a, b, c) = (1, a', b', c'),$$

on trouve

$$c = c' + 3t_1, \quad b = b' - t_1 + 3t_2, \quad a = a' - t_2,$$

t_1 et t_2 étant des nombres entiers quelconques.

Le nombre c doit être diviseur de 35 vérifiant les congruences

$$c \equiv 1 \pmod 2, \quad c \equiv -1 \pmod 3.$$

Les diviseurs de 35 sont.	1,	5,	7,	35
Leurs restes module 3.	1,	-1,	1,	-1

Le nombre c peut donc avoir les valeurs

$$c = -1, 5, -7, 35.$$

De la représentation

$$29 = (1, -3, 7, 8)$$

on déduit

$$c = 8 + 3t_1 = -1, 5, -7, 35; \quad t_1 = -3, -1, -5, 9,$$

$$b = \quad 7 - t_1 + 3t_2 = 10 + 3t_2, \quad 8 + 3t_2, \quad 12 + 3t_3, \quad -2 + 3t_2,$$

$$a = -3 - t_2.$$

Les valeurs de a et b sont assujetties aux conditions

$$b \equiv 1, \quad a \equiv 0 \pmod 2,$$

$$b \equiv 0, \quad a \equiv 0 \pmod 3),$$

La valeur de b étant multiple de 3, on a

$$b = 12 + 3t_2, \quad e = -7,$$

Pour que b soit impair, il faut que t_2 le soit aussi. Posons

$$t_2 = 2u + 1,$$

on aura

$$b = 15 + 6u, \quad a = -4 - 2u.$$

De la relation

$$a \equiv 0 \pmod 3) \quad \text{ou} \quad -4 - 2u \equiv 0 \pmod 3)$$

résulte

$$u \equiv 1 \pmod 3), \quad u = 1 + 3v,$$
$$b = 21 + 18v, \quad a = -6 - 6v.$$

Pour

$v =$	$0,$	$1,$	$-1,$	$-2,$	$-3,$		
$a =$	$-6,$	$-12,$	$0,$	$6,$	$12,$		
$b =$	$21,$	$39,$	$3,$	$-15,$	$33,$		
$c =$	$-7,$	$-7,$	$-7,$	$-7,$	$-7,$		
$\varphi(1) = 1 + a + b + c =$	$9,$	$21,$	$-3,$	$-15,$	$38;$	$f(1) =$	-3.11
$-\varphi(-1) = 1 - a + b - c =$	»,	»,	$11,$	»,	»;	$f(-1) =$	11.19

On n'obtient qu'une seule fonction

$$\varphi(x) = x^3 + 3x - 7,$$

qui est en réalité diviseur de $f(x)$

$$f(x) = (x^3 + 3x - 7)(x^4 - x^3 + 16x - 5).$$

Pour décomposer les nombres en facteurs premiers, nous nous sommes servi d'une Table contenue dans le Recueil de M. Hoüel (*Tables de logarithmes,* etc., Table VII, p. 116).

Dans les exemples compliqués, il est nécessaire de recourir aux grandes Tables des diviseurs de Burckhard (jusqu'à 3 036 000).

Sur la résolution des problèmes géométriques par le calcul des variations; par M. A. Starkoff.

(Séance du 18 mars 1885.)

Parmi les problèmes géométriques sur le calcul des variations, qui ont pour but la recherche des courbes, on rencontre des questions qui, par la forme des données, peuvent être résolues seulement en prenant l'arc s pour variable indépendante. Encore Moigno ([1]), étant tombé sur des cas de cette nature, a indiqué la voie qu'il faut suivre lorsqu'on prend l'arc s pour variable indépendante. Le procédé proposé par Moigno est fondé sur les considérations suivantes. Comme les accroissements de chaque coordonnée x et y séparément ne doivent jamais être plus grands que l'accroissement de l'arc s, il suit que les relations entre l'arc s et chacune des coordonnées ne sont pas toutes géométriquement possibles. Comme exemple, Moigno indique

$$y = a + bs, \quad \text{où} \quad b > 1,$$

équation géométriquement impossible. Il est évident que dans la résolution des problèmes géométriques sur le calcul des variations, dans le cas où l'arc s est pris pour variable indépendante, les fonctions géométriquement impossibles semblables à celle qui vient d'être citée ne doivent pas entrer dans l'expression sous le signe $\int$. Arrivé à ces conséquences, Moigno indique un moyen pour faire entrer dans la représentation analytique du problème seulement des relations géométriquement possibles entre l'arc s et les coordonnées. A cet effet, il faut introduire dans le problème la condition que les valeurs des dérivées $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ soient renfermées entre les limites $+1$ et -1. Cette condition, à l'avis de Moigno, peut être introduite en supposant que les dérivées dont il s'agit sont liées entre elles par l'équation

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 1 = 0.$$

([1]) Moigno, *Calcul des variations*, p. 235, etc. Paris, 1861.

Mais il est évident que cette équation est loin de renfermer tous les cas, c'est-à-dire de déterminer toutes les fonctions pour lesquelles les conditions

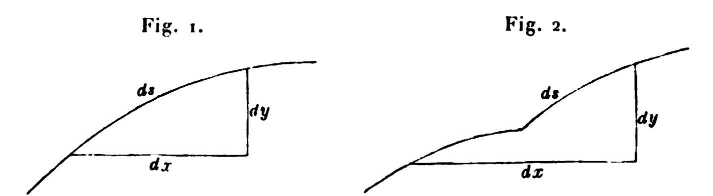
$$(2) \qquad +1 > \frac{dx}{ds} > -1 \quad \text{et} \quad +1 > \frac{dy}{ds} > -1$$

sont remplies ([1]). C'est pour cela que l'introduction de l'équation (1) dans l'expression analytique d'un problème géométrique sur le calcul des variations, introduction effectuée pour restreindre ce problème par les conditions (2), en retranche une infinité de relations géométriquement possibles pour lesquelles, quoique l'équation (1) n'ait pas lieu, les conditions (2) sont remplies. Par conséquent la résolution du problème sous cette forme n'aura pas le degré de généralité voulue, qui peut être obtenu seulement par l'introduction dans la représentation du problème de toutes les relations géométriquement possibles entre l'arc s et les coordonnées x et y.

D'autre part, il est facile de voir que pour chaque point *ordinaire* ([2]) de la courbe (*fig.* 1) a lieu l'équation

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 = ds^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 1 = 0,$$

qui cesse d'exister au point *singulier* (*fig.* 2). (Pour mon but, il



suffit d'avoir en vue les points *anguleux*). Mais les conditions (2) sont remplies indifféremment dans les points ordinaires et dans les points singuliers en exigeant seulement que la ligne soit con-

---

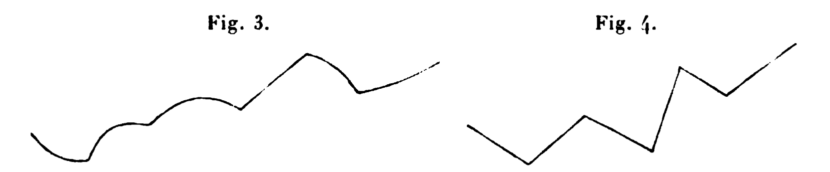
([1]) Par exemple, l'équation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^m + \left(\frac{dy}{ds}\right)^n - 1 = 0,$$

où m et n sont réelles et positives, présente un cas plus général que l'équation (1).

([2]) Jordan, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 198, etc. Paris, 1882.

tinue suivant sa longueur. Donc l'équation (1) exprime la condition qui détermine les courbes continues, construites suivant toute leur longueur d'après une loi donnée, tandis que les inégalités (2) peuvent également se rapporter soit aux courbes composées de points ordinaires, soit aux lignes continues dans leur longueur ayant un nombre indéterminé de points singuliers, c'est-à-dire aux lignes brisées qui se composent de morceaux de lignes courbes (*fig.* 3) ou droites (*fig.* 4). Donc la résolution du pro-



blème géométrique sur le calcul des variations avec l'introduction de l'équation (1) équivaut à éliminer les lignes brisées et à tenir compte seulement des courbes construites suivant toute leur longueur, d'après une loi déterminée. Au contraire, la résolution du même problème, d'après les conditions (2), a un caractère plus général et embrasse aussi bien les lignes courbes que brisées.

Dans la recherche d'un maximum ou d'un minimum de l'intégrale

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \psi(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx,$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les dérivées successives de y, on tient compte seulement des fonctions $y = \mathrm{F}(x)$ qui représentent des courbes continues, c'est-à-dire les valeurs de y, pour lesquelles l'équation

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 1 = 0$$

a lieu en général. Si, dans ce cas, on obtient dans la solution même des points singuliers, l'intégrale ne sera ni maximum, ni minimum [1].

---

[1] En effet, soient, par exemple,

$$u = \int_{x_0}^{x_1} v\, dx \quad \text{et} \quad v = f(x, y, y_1);$$

Mais, dans la recherche d'un maximum ou d'un minimum de l'intégrale

$$(4)\qquad \int_{s_0}^{s_1} (s, x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\, ds,$$

limitée seulement par les conditions

$$(2)\qquad +1 > \frac{dx}{ds} > -1 \quad \text{et} \quad +1 > \frac{dy}{ds} > -1,$$

intervient encore outre *toutes* les fonctions *qui entrent dans l'intégrale* (3) et qui représentent des courbes, une nouvelle série de fonctions qui représentent des lignes brisées et qui disparaissent de l'intégrale (3). Mais, si nous limitons l'intégrale (4) par l'introduction de l'équation (1), nous en excluons par cela même les lignes brisées, et le résultat obtenu sera complètement identique avec celui que l'on trouve dans la recherche du maximum ou du minimum de l'intégrale (3). Donc, la résolution du problème géométrique par le calcul des variations sous la forme

$$(5)\qquad \delta \int_{s_0}^{s_1} \varphi(s, x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\, ds = 0,$$

---

la condition pour un maximum ou un minimum sera

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial v}{\partial y_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y_1} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial y_1} y_1 - \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} y_2 = 0.$$

Soit la courbe trouvée

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

nous avons

$$(\beta)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} y_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y_1^2 + \frac{\partial F}{\partial p} y_2 = 0.$$

En substituant les valeurs de y_1 et y_2, déterminées par les équations (β), dans l'expression (α), nous obtenons

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y_1}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial y_1}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} y_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y_1^2\right) = 0.$$

Mais, pour le point singulier, nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

par suite $\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} = 0$, et l'intégrale donnée ne sera ni maximum ni minimum.

avec les conditions (2), sera plus générale que celle de la forme

$$(6) \qquad \delta \int_{x_0}^{x_1} \psi(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx = 0,$$

parce que dans le cas (5), outre les courbes, on introduit dans l'intégrale aussi les lignes brisées.

Pour illustrer ce qui a été dit, nous examinerons le problème de Newton sur la surface de moindre résistance. La voie généralement usitée pour la résolution de ce problème consiste à rendre égale à zéro la première variation de l'intégrale

$$\int y y_1^3\, ds,$$

après l'avoir préalablement réduite à la variable indépendante x à l'aide des formules

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad dy = p\, dx, \quad y_1 = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

en vertu desquelles nous avons

$$\delta \int y y_1^3\, ds = \delta \int y y_1^2\, dy = \delta \int y \frac{p^3}{1+p^2}\, dx = 0;$$

d'où, les opérations indiquées effectuées, on trouve l'équation de la courbe

$$y = c_1 \frac{(1+p^2)^2}{p^3}, \quad x = c_1 \left(\frac{3}{4} \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^2} + \log p \right) + c_2.$$

On obtient la même courbe en résolvant le problème sous la forme

$$(7) \qquad \delta \int [y y_1^3 + \lambda (x_1^2 + y_1^2 - 1)]\, ds = 0.$$

En effet, on tire de (7) deux équations différentielles

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{d}{ds} \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{ds} \frac{\partial v}{\partial y_1} = 0,$$

dont l'intégrale sera [1]

$$(8) \qquad v = x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} \quad \text{ou} \quad \lambda + y y_1^3 = 0.$$

---

[1] Moigno, *Calcul des variations*, p. 240. Paris, 1861.

D'autre part, de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{d}{ds}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,$$

v ne contenant pas x et $\frac{\partial v}{\partial y}$ étant égal à zéro, nous obtiendrons

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = -2c_1 \quad \text{ou} \quad x_1\lambda + c_1 = 0,$$

d'où la valeur de λ se déterminera ainsi

$$\lambda = -\frac{c_1}{x_1}.$$

En portant cette valeur dans l'intégrale (8), nous avons

$$yx_1y_1^3 = c_1,$$

d'où, en substituant pour x_1 et y_1 leurs valeurs

$$x_1 = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

on trouve

$$y = c_1\frac{(1+p^2)^2}{p^3},$$

l'équation de la même courbe que nous avons obtenue en prenant x pour variable indépendante.

Mais Legendre [1] avait déjà indiqué que la solution obtenue ne présente pas un minimum et qu'une ligne quelconque de zigzag ou brisée donne la surface de moindre résistance. En introduisant, conformément à ce qui a été indiqué plus haut, cette ligne brisée dans la représentation analytique du problème, c'est-à-dire en prenant la variation de l'intégrale

$$\delta\int yy_1^3\,ds,$$

sans introduire l'équation (1) comme restriction, nous avons

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{ds}\frac{\partial v}{\partial y_1} = 0$$

---

(1) Legendre, *Mémoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations* (*Mémoires de l'Académie de Paris*, p. 24; 1786).

ou

$$y_1\left(y_1^2 + 3y\,\frac{dy_1}{ds}\right) = 0,$$

d'où

$$y_1 = \frac{dy}{ds} = 0 \quad \text{et} \quad y_1^2 + 3y\,\frac{dy_1}{ds} = 0.$$

La première de ces équations appartient à l'axe de révolution ou à chaque droite qui lui est parallèle, mais la seconde équation, après avoir séparé les variables et substitué

$$ds = \frac{dy}{y_1}$$

à ds, donne

$$\frac{dy}{y} + 3\,\frac{dy_1}{y_1} = 0 \quad \text{ou} \quad yy_1^3 = c_1;$$

d'où

(9) $$y = \frac{c_1}{y_1^3} \quad \text{ou} \quad y = c_1\,\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3},$$

équation de la courbe relativement à laquelle Legendre (*Mém. cit.*, p. 24) a déjà remarqué que sur elle l'intégrale de la résistance a un minimum absolu.

Pour la détermination de x, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}} \quad \text{ou} \quad dx = \frac{\sqrt{1-y_1^2}}{y_1}\,dy.$$

d'où

$$x = \int \frac{\sqrt{1-y_1^2}}{y_1}\,dy + c_2 = \frac{\sqrt{1-y_1^2}}{y_1} + \int \frac{y\,dy_1}{y_1^2\sqrt{1-y_1^2}} + c_2.$$

En effectuant ici l'intégration indiquée en y substituant la valeur de y tirée de l'expression (9) et posant, pour abréger,

$$\sqrt[3]{c_1} = a \quad \text{et} \quad -\tfrac{1}{8}c_1 \log c_1 + c_2 = b,$$

nous obtenons l'équation de la courbe sous forme finie

$$x = \frac{3}{8}\,\frac{1}{a}\left[\left(2y - a^3 y^{\frac{1}{3}}\right)\sqrt{y^{\frac{2}{3}} - a^2} + a^4 \log\left(y^{\frac{1}{3}} - \sqrt{y^{\frac{2}{3}} - a^2}\right)\right] + b.$$

Il est facile de voir que sur cette courbe l'intégrale de la résistance a une valeur moindre que sur la courbe de Newton. En

effet, sur la courbe de Newton, déterminée par l'équation

$$y = c_1 \frac{(1+p^2)^2}{p^3},$$

l'intégrale de la résistance obtient la valeur

$$k\int yy_1^3\,ds = kc_1\int \frac{(1+p^2)^2}{p^3}\,\frac{p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,ds = kc_1\int\sqrt{1+p^2}\,ds.$$

Mais, sur la courbe de Legendre indiquée ici et déterminée par l'équation

$$y = c_1 \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3},$$

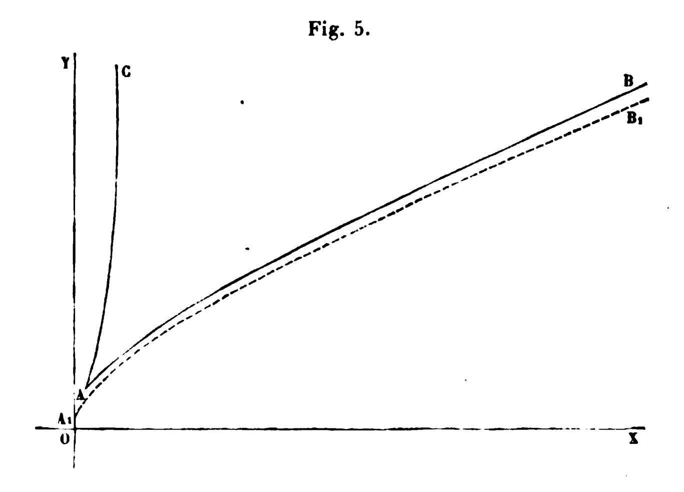
nous avons

$$k\int yy_1^3\,ds = kc_1\int \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}\,\frac{p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,ds = kc_1\int ds,$$

ce qu'il s'agissait de montrer.

Sur la *fig.* 5 la courbe continue est celle de Newton, la courbe

Fig. 5.



pointillée est celle de Legendre ; elles sont construites avec les mêmes valeurs des constantes arbitraires.

Il est facile d'obtenir les mêmes résultats aussi dans le cas où la surface de la moindre résistance est limitée par une condition, par celle, par exemple, de contenir un volume donné. Dans ce cas

la résolution du problème, la coordonnée x étant prise pour variable indépendante, s'obtient de l'expression

$$\delta\int\left(y\frac{p^3}{1+p^2}+\alpha y^2\right)dx=0,$$

ou de l'expression

$$\delta\int\left[yy_1^3+\alpha y^2\sqrt{1-y_1^2}+\lambda(x_1^2+y_1^2-1)\right]ds=0;$$

dans l'un et dans l'autre cas on obtient comme solution la courbe déterminée par l'équation

$$\alpha y^2+c_1=\frac{2yp^3}{(1+p^2)^2}. \tag{10}$$

Mais, comme M. Todhunter a montré ([1]) que la solution obtenue ne présente pas un minimum, et que l'intégrale de la résistance sur une certaine ligne brisée formant par la révolution un solide de même volume a une valeur moindre. En introduisant cette ligne brisée dans la représentation analytique du problème en se fondant sur les considérations ci-dessus exposées, c'est-à-dire en admettant l'arc s pour variable indépendante, sans restreindre cette variable par l'équation (1), nous obtenons

$$\delta\int\left(yy_1^3+\alpha y^2\sqrt{1-y_1^2}\right)ds=0;$$

d'où il est facile de trouver l'équation de la courbe

$$\alpha y^2+\frac{c_1}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{2yp^3}{(1+p^2)^2}. \tag{11}$$

Afin de montrer que le minimum de l'intégrale de la résistance, déterminé par la courbe (11), est moindre que celui qui est déterminé par la courbe (10), nous résolvons les deux équations (11) et (10) par rapport à y, et nous obtenons de (11)

$$y=\frac{1}{\alpha}\frac{p^3}{(1+p^2)^2}\left[1-\sqrt{1-\alpha c_1\frac{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}{p^6}}\right], \tag{11_1}$$

([1]) TODHUNTER, *Researches in the calculus of variations*, p. 200. London, 1871.

et de l'équation (10) nous trouvons

$$(10_1)\qquad y = \frac{1}{\alpha}\frac{p^3}{(1+p^2)^2}\left[1-\sqrt{1-\alpha c_1\frac{(1+p^2)^4}{p^6}}\right].$$

En désignant, pour abréger,

$$P = \alpha c_1 \frac{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}{p^6},$$

et en décomposant dans les expressions (11_1) et (10_1) les radicaux en séries, nous avons, dans le premier cas,

$$(11_2)\qquad \sqrt{1-P} = 1-\frac{P}{2}-\frac{P^2}{8}-\frac{P^3}{16}-\frac{5P^4}{128}-\ldots,$$

et dans le second cas, c'est-à-dire pour (10_1),

$$(10_2)\quad \left\{\begin{aligned} \sqrt{1-P(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 &- \frac{P}{2}(1+p)^{\frac{1}{2}} - \frac{P^2}{8}(1+p^2) \\ &- \frac{P^3}{16}(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{5P^4}{128}(1+p^2)^2 - \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs des radicaux dans les expressions (11_1) et (10_1) pour y, nous obtenons, pour (11_1),

$$y = \frac{1}{\alpha}\frac{p^3}{(1+p^2)^2}\frac{P}{2}\left(1+\frac{P}{4}+\frac{P^2}{8}+\frac{5P^3}{64}+\ldots\right),$$

et pour (10_1),

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{\alpha}\frac{p^3}{(1+p^2)^2}\frac{P}{2}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\Big[1 &+ \frac{P}{4}(1+p^2)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{P^2}{8}(1+p^2) + \frac{5P^3}{64}(1+p^2)^{\frac{3}{2}} + \ldots\Big]. \end{aligned}$$

En introduisant les expressions ainsi obtenues pour les y dans l'intégrale de la résistance

$$k\int yy_1^3\,ds,$$

nous trouvons la valeur de cette intégrale pour la courbe (11),

$$k\int yy_1^3\,ds = \frac{k}{2\alpha}\int\left(1+\frac{P}{4}+\frac{P^2}{8}+\frac{5P^3}{64}+\ldots\right)ds.$$

et, pour la courbe (10),

$$k \int y y_1^3 \, ds = \frac{k}{2\alpha_0} \int \Big[1 + \frac{P}{4}(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{P^2}{8}(1+p^2) + \frac{5P^3}{64}(1+p^2)^{\frac{3}{2}} + \ldots \Big] (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \, ds.$$

Il est évident que la valeur de la première intégrale est plus petite que la valeur de la seconde (¹). C. Q. F. D.

Sur la détermination des axes de l'indicatrice en un point d'une surface du second ordre; par M. G. Humbert.

(Séance du 15 avril 1885.)

La construction que nous allons donner repose sur le lemme suivant, facile à démontrer :

Soit un cercle γ, *coupant une quadrique* E *en quatre points* a, b, a', b'; *les droites* aa' *et* bb' *sont parallèles à deux génératrices d'un cône du second ordre,* H, *homocyclique à* E.

Appelons o le centre de E : les plans menés par o normalement aux droites aa' et bb' sont, d'après cela, les plans menés tangentiellement à un cône K, de sommet o, supplémentaire du cône H, par la normale δ au plan du cercle γ, issue de o.

Or, les cônes H étant homocycliques, les cônes K sont homofocaux (ils ont pour focales les droites menées par o normalement aux plans des sections circulaires de E), et par suite les plans menés par la droite δ tangentiellement à l'un quelconque des cônes K sont également inclinés sur deux plans fixes, passant par δ.

Ces deux plans coupent le plan du cercle γ suivant deux droites qui sont, d'après ce qui précède, parallèles aux bissectrices des

(¹) A l'aide des mêmes raisonnements il serait facile de faire voir que la surface de révolution à résistance maximum comprenant un volume donné, déterminé conformément aux considérations indiquées plus haut, donne une valeur plus grande pour l'intégrale de la résistance que celle obtenue en prenant la coordonnée x pour variable indépendante.



droites aa' et bb', c'est-à-dire aux axes de la section faite dans E par le plan du cercle γ.

Pour déterminer ces deux plans, on peut supposer que le cône K se réduise à deux de ses focales : soient D_1 et D_2 ces droites, situées dans un même plan principal de E ; les plans cherchés sont les plans bissecteurs des plans menés par la droite δ et chacune des droites D_1 et D_2.

De là résulte la construction suivante :

Soient, dans un plan principal d'une quadrique, D_1 *et* D_2 *les perpendiculaires menées par le centre aux deux plans de sections circulaires normaux au plan principal considéré.*

Soient

P *un plan quelconque ;*

p *le pied de la perpendiculaire abaissée sur ce plan du centre de la quadrique ;*

m_1 *et* m_2 *les points où il coupe les droites* D_1 *et* D_2.

Les axes de la section faite par le plan P *dans la quadrique sont parallèles aux bissectrices des droites* pm_1 *et* pm_2.

Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques; par M. E. Goursat.

(Séance du 6 mai 1885.)

La réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques ou à des intégrales abéliennes de genre inférieur a fait, depuis quelques années, l'objet d'un grand nombre de Mémoires. Je citerai en particulier les travaux de M. Kœnigsberger, de M. Picard (*Bulletin de la Société mathématique,* t. XI), de Mme Kowalewski (*Acta Mathematica,* t. IV) et un article récent de M. Poincaré dans le *Bulletin,* où il expose deux beaux théorèmes dus à M. Veierstrass. La plupart de ces géomètres se sont placés au point de vue de la théorie des fonctions Θ de plusieurs variables. Dans le travail ci-dessous, la méthode suivie est au con-

traire purement algébrique; je me borne d'ailleurs aux intégrales hyperelliptiques, et j'obtiens quelques résultats qui me paraissent dignes d'intérêt.

1. Soit $P(x)$ un polynôme entier en x, n'ayant que des facteurs linéaires simples. Si dans le radical $\sqrt{P(x)}$ on remplace x par une fonction rationnelle $\varphi(t)$ d'une nouvelle variable t, on a identiquement

$$\sqrt{P(x)} = \psi(t)\sqrt{Q(t)},$$

$\psi(t)$ désignant une autre fonction rationnelle de t et $Q(t)$ un polynôme que l'on peut supposer composé de facteurs du premier degré tous différents. Il est aisé de trouver d'où proviennent ces facteurs linéaires. Supposons d'abord que $P(x)$ soit de degré pair $2p$,

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2p})$$

et soit

$$x = \varphi(t) = \frac{U}{V},$$

U et V désignant deux fonctions entières de t. On aura

$$\sqrt{P(x)} = \frac{1}{V^p}\sqrt{(U - a_1 V)(U - a_2 V)\ldots(U - a_{2p} V)};$$

il est clair qu'on pourra faire sortir du radical tous les facteurs linéaires d'ordre pair de multiplicité des différents polynômes $U - a_i V$, et tous *les* facteurs d'ordre impair de multiplicité resteront une fois sous ce radical. Donc, les *facteurs linéaires de* $Q(t)$ *correspondent aux racines d'ordre impair de multiplicité des diverses équations*

$$U - a_i V = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2p).$$

Supposons, en second lieu, que $P(x)$ soit de degré impair $2p - 1$,

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2p-1}),$$

et soit toujours $x = \frac{U}{V}$. On aura, dans ce cas,

$$\sqrt{P(x)} = \frac{1}{V^p}\sqrt{V(U - a_1 V)\ldots(U - a_{2p-1} V)};$$

les facteurs linéaires de $Q(t)$ proviennent donc des racines d'ordre

impair de multiplicité de l'équation $V=0$ et des diverses équations

$$U - a_i V = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2p-1).$$

On peut réunir les deux énoncés en un seul en considérant $P(x)$, lorsqu'il est de degré impair, comme la limite d'un polynôme de degré pair dont une racine serait devenue infinie, ou mieux, en posant dans tous les cas

$$P(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p}),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ étant $2p$ quantités différentes et $x-\infty$ devant être remplacé par l'unité. Il est clair que tout polynôme n'ayant que des facteurs simples peut être mis sous cette forme, et d'une seule manière. Grâce à cette convention, l'énoncé précédent s'applique à tous les cas; les facteurs linéaires de $Q(t)$ proviennent des racines d'ordre impair de multiplicité des $2p$ équations

$$\varphi(t) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Dans chacune de ces équations, nous tiendrons compte du degré de multiplicité de la racine $t=\infty$, si elle se présente. Soient D le degré de $\varphi(t)$ et N_i le nombre des racines de degré impair de l'équation $\varphi(t)=a_i$, il est clair que la différence $D-N_i$ est un nombre pair, et par suite

$$2pD - \sum_{i=1}^{i=2p} N_i$$

sera aussi un nombre pair, ce qui exige que

$$\sum_{i=1}^{i=2p} N_i$$

le soit également. Si aucune des équations précédentes n'admet la racine $t=\infty$ à un degré impair de multiplicité, on voit que le nouveau radical portera sur un polynôme de degré pair. Il en serait autrement si l'une des équations $\varphi(t)=a_i$ admettait la racine $t=\infty$ à un degré impair de multiplicité. Mais on voit ainsi que le cas où $Q(t)$ est de degré impair s'offre comme un cas particulier, celui où une des racines est devenue infinie.



Pour conserver la généralité, nous écrirons

$$Q(t) = B(t - b_1)(t - b_2)\ldots(t - b_{2q}),$$

$b_1, b_2, \ldots, b_{2q}$ désignant $2q$ quantités distinctes, qui représentent les racines d'ordre impair de multiplicité des diverses équations $\varphi(t) = a_i$, et $t - \infty$ devant être remplacé par l'unité. On a du reste la relation évidente

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=2p} N_i = 2q.$$

De la discussion précédente il résulte que le cas d'un polynôme d'un degré impair se ramène au cas d'un polynôme d'un degré pair et supérieur d'une unité au degré du premier. C'est ce dont il est aisé de se rendre compte directement; en effet, étant donné un radical carré portant sur un polynôme de degré impair, une substitution linéaire effectuée sur la variable donne en général une expression dépendant d'un radical carré portant sur un polynôme de degré pair. Les $2p$ racines du nouveau polynôme correspondent, par la substitution linéaire effectuée, aux $2p - 1$ racines du premier et à la valeur ∞. Il est donc naturel d'ajouter une racine infinie aux $2p - 1$ racines finies de ce premier polynôme.

2. En remplaçant toujours $t - \infty$ par l'unité, le premier membre de chaque équation $\varphi(t) = a_i$ se présentera sous la forme

$$\prod_{k=1}^{k=2q} (t - b_k)^{r_i^k} [(t - c_1)(t - c_2)\ldots(t - c_{ni})]^2,$$

les nombres r_i^k ayant l'une des valeurs 0 ou 1, et les quantités $c_1, c_2, \ldots, c_{n_i}$ n'étant pas forcément distinctes entre elles ni toutes différentes des quantités b_i. A la relation (1) on peut joindre immédiatement les suivantes :

$$(2) \quad D = N_1 + 2n_1 = N_2 + 2n_2 = \ldots = N_i + 2n_i = \ldots = N_{2p} + 2n_{2p}.$$

On obtient une nouvelle relation en appliquant une formule générale que j'ai démontrée antérieurement (*Annales de l'École Normale*, 3[e] série, t. II, p. 40). Cette formule est la suivante

$$\Sigma(r - 1) = 2n - 2,$$

n désignant le degré d'une fonction rationnelle quelconque $f(t)$ et r l'ordre de multiplicité d'une racine finie ou infinie de l'équation $f(t) = m$, le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(t) = m$ possède des racines multiples. Appliquons la relation précédente à la fonction $\varphi(t)$ servant à la transformation. Si les n_i quantités $c_1, c_2, \ldots, c_{n_i}$ sont toutes distinctes et différentes des quantités b_i, l'équation $\varphi(t) = a_i$ aura n_i racines doubles et les termes qui dans $\Sigma(r-1)$ proviennent des racines de cette équation auront une somme égale à n_i. Si les quantités c_i n'étaient pas toutes distinctes, ou que quelques-unes fissent partie des b_i, cette somme serait plus grande; il suffit, pour s'en assurer, de remarquer que, lorsque deux racines viennent se confondre, quels que soient leurs ordres de multiplicité, $\Sigma(r-1)$ augmente. On aura donc

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=2p} n_i + \Delta = 2D - 2;$$

Δ désigne un nombre entier qui, d'après la formule générale, ne pourra être négatif. Ce nombre ne sera nul que si toutes les quantités c_i sont différentes entre elles et différentes des quantités b_i pour toutes les équations $\varphi(t) = a_i$ et si, en outre, l'équation $\varphi(t) = m$ n'a que des racines simples pour toute valeur de m, différente des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$.

Les équations (1), (2), (3) suffisent complètement à la discussion du problème.

3. Le polynôme $P(x)$ étant donné, ainsi que le nombre entier q, imaginons que l'on connaisse un système de solutions des équations (1), (2), (3) et que l'on veuille calculer les coefficients de la fonction rationnelle $\varphi(t)$. On disposera en tout de

$$\sum_{i=1}^{i=2p} + 2p + 2q - 1$$

coefficients indéterminés et les équations $\varphi(t) = a_i$ donnent lieu à

$$(2p-2)(D+1)$$

équations de condition. Or des équations (1) et (2) on tire

$$(4) \qquad 2\sum_{i=1}^{i=2p} n_i + 2q = 2pD,$$

et, en remplaçant dans l'équation (3) Σn_i par

$$2pD - 2q - \sum_{i=1}^{i=2p} n_i,$$

il vient la nouvelle formule

$$2pD - 2q - \sum_{i=1}^{i=2p} n_i + \Delta = 2D - 2,$$

qui peut aussi s'écrire

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=2p} n_i + 2p + 2q - 1 = (2p-2)(D+1) + \Delta + 3.$$

On voit que le nombre des coefficients indéterminés dépasse le nombre des équations de condition de $\Delta + 3$ unités : on en déduira donc en général une fonction rationnelle répondant à la question et contenant $\Delta + 3$ paramètres arbitraires. Il est évident *a priori* que, s'il y a une solution, elle doit contenir au moins trois coefficients arbitraires; si en effet la fonction $\varphi(t)$ est une solution, il en sera de même de $\varphi\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)$.

Écartons d'abord le cas particulier où $p = 1$. Alors, quel que soit le polynôme $Q(t)$, il existe une infinité de fonctions rationnelles, telles que l'on ait

$$\sqrt{P(x)} = \psi(t)\sqrt{Q(t)};$$

si $P(x) = A(x - a_1)(x - a_2)$, il suffira de poser

$$\frac{x - a_1}{x - a_2}\, Q(t)[\varphi_1(t)]^2,$$

φ_1 désignant une fonction rationnelle arbitraire de t, et il est aisé de voir que l'on a ainsi toutes les substitutions rationnelles répondant à la question. Pour faire disparaître l'irrationnalité, il suffira de supposer $Q = 1$.

Dans ce qui va suivre, je supposerai désormais les nombres p et q supérieurs à l'unité.

4. Si dans l'équation (3) je remplace

$$\sum_{i=1}^{i=2p} n_i$$

par sa valeur $pD - q$ tirée de l'équation (4), il vient la nouvelle équation

$$(6) \qquad (p-2)D + \Delta = q - 2,$$

dont on déduit les conséquences suivantes :

1° Supposons $p = q = 2$, on aura $\Delta = 0$, et l'on trouve pour les équations (1), (2), (3) une infinité de systèmes de solutions qui conduisent précisément aux transformations de Jacobi pour les intégrales elliptiques de première espèce.

2° Soit $p = 2$, $q > 2$, de l'équation (6) on tire $\Delta = q - 1$ et l'on a encore une infinité de systèmes de solutions pour les équations proposées; on en déduit une infinité de substitutions rationnelles conduisant d'un radical portant sur un polynôme du quatrième degré à un radical carré portant sur un polynôme d'un degré déterminé supérieur à quatre. Nous verrons plus loin que ces transformations donnent lieu à des cas de réduction de certaines intégrales hyperelliptiques à des intégrales elliptiques.

3° Soit $p > 2$. L'équation (6) montre qu'on ne pourra avoir $q < p$ et l'on n'aura $q = p$ que si l'on a en même temps $\Delta = 0$, $D = 1$, c'est-à dire dans le cas d'une substitution linéaire. Enfin, si l'on suppose $q > p$, l'équation (6) indique que les deux nombres D et Δ doivent rester inférieurs à certaines limites. Il n'y aura donc qu'un nombre *limité* de systèmes de solutions pour les équations (1), (2), (3) et par suite qu'un nombre limité de types de substitutions conduisant d'un radical carré portant sur un polynôme de degré $2p$ à un radical carré portant sur un polynôme de degré $2q$.

Pour prendre un exemple de cette dernière circonstance, supposons $p = 3$, $q = 4$; la seule solution convenable de l'équation (6) est $D = 2$, $\Delta = 0$. La substitution sera du second degré

et il faudra en outre que deux des équations $\varphi(t) = a_i$ aient une racine double. Si l'on suppose $p = 3$, $q = 5$, l'équation (6) admet les deux systèmes de solutions

$$D = 2, \quad \Delta = 1,$$
$$D = 3, \quad \Delta = 0;$$

dans le premier cas une des équations $\varphi(t) = a_i$ aura une racine double. Dans le second cas, quatre des équations $\varphi(t) = a_i$ auront une racine double et une racine simple.

Soit $Q(t)$ un polynôme de degré $2q$ ou $2q - 1$, sans facteurs multiples; nous dirons, pour abréger, que le radical $\sqrt{Q(t)}$ offre un *type réductible* lorsqu'il est possible de trouver un polynôme $P(x)$ de degré $2p$ ou $2p - 1$ $(p > 1, p < q)$, tel que l'on ait par une substitution rationnelle

$$\sqrt{P(x)} = \psi(t)\sqrt{Q(t)}.$$

Supposons qu'on ait ramené par une substitution linéaire $P(x)$ à la forme suivante

$$P(x) = x(x-1)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p}),$$

que j'appellerai *forme normale;* $P(x)$ contient ainsi $2p - 3$ coefficients indéterminés et la transformation en introduit $\Delta + 3$, comme nous l'avons vu. On pourra profiter de trois de ces paramètres pour ramener aussi $Q(t)$ à la forme normale, et les coefficients de $Q(t)$ dépendront en tout de $2p + \Delta - 3$ paramètres arbitraires. Si l'on remplace Δ par sa valeur tirée de la formule (6), le nombre précédent peut s'écrire

$$q - 1 - (p-2)(D-2);$$

on voit qu'il est au plus égal à $q - 1$, et il n'atteindra cette valeur maximum que sous l'une des conditions $p = 2$ ou $D = 2$. Or le polynôme le plus général $Q(t)$ mis sous la forme normale dépend de $2q - 3$ paramètres, nombre supérieur à $q - 1$, dès que $q > 2$. Les types réductibles sont donc des cas très particuliers parmi les polynômes dont le degré est $2q$ ou $2q - 1$.

5. Le théorème de Jacobi, qui unit le problème algébrique de la transformation des radicaux carrés portant sur un polynôme du quatrième degré aux propriétés des fonctions elliptiques, peut se

généraliser comme il suit. Soit toujours

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2p})$$

et soit $x = \frac{U}{V}$ une substitution rationnelle de degré D, telle que l'on ait

$$\sqrt{P(x)} = \psi(t)\sqrt{Q(t)}.$$

Proposons-nous de rechercher ce que devient la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

par la substitution précédente; on a

$$dx = \frac{U'V - UV'}{V^2}\,dt,$$

$$\sqrt{P(x)} = \frac{1}{V^p}\sqrt{(U - a_1 V)(U - a_2 V)\ldots(U - a_{2p} V)}$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{V^{p-2}(U'V - UV')\,dt}{\sqrt{(U - a_1 V)(U - a_2 V)\ldots(U - a_{2p} V)}}.$$

Tout facteur multiple d'ordre r de l'une des équations

$$U - a_i V = 0$$

figure dans $U'V - UV'$ à la puissance $r - 1$; si r est pair et égal à $2m$, on pourra supprimer ce facteur m fois dans les deux termes, et il restera simplement au numérateur à la puissance $m - 1$. Au contraire, si r est de la forme $2m + 1$, il restera au numérateur à la puissance m et il figurera à la première puissance sous le radical. Après la suppression de tous ces facteurs communs aux deux termes, le radical se réduira à $\sqrt{Q(t)}$ et le facteur qui reste de $U'V - UV'$ sera au plus de degré Δ. En effet, $U'V - UV'$ est au plus de degré $2D - 2$ et l'on a divisé $U'V - UV'$ par un facteur dont le degré est précisément égal à $\sum_{i=1}^{i=2p} n_i$, comme il est bien facile de le voir, c'est-à-dire $2D - 2 - \Delta$, d'après la relation (3). Soit maintenant $f(x)$ une fonction entière quelconque de x dont le degré ne dépasse pas $p - 2$; par la substitution précédente on

aura

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}, \tag{7}$$

$f_1(t)$ désignant une fonction entière de t dont le degré ne dépasse pas $D(p-2)+\Delta$, c'est-à-dire $q-2$, d'après la formule (6).

On pourrait démontrer plus simplement cette propriété en remarquant que, l'intégrale

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$$

étant de première espèce, l'intégrale

$$\int \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

qui lui est égale, devra rester finie pour toute valeur de t et par suite $f_1(t)$ ne pourra être de degré supérieur à $q-2$.

6. De la formule (7) il résulte que l'intégrale hyperelliptique de première espèce et de genre $q-1$

$$\int \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}$$

se ramène par la substitution $\varphi(t)=x$ à une autre intégrale hyperelliptique de première espèce et de genre $p-1$. En rapprochant ce résultat des précédents, on arrive aux conclusions suivantes :

1° Il existe une infinité de polynômes d'un degré donné, supérieur à quatre, tels qu'en choisissant convenablement un polynôme $f_1(t)$ l'intégrale hyperelliptique

$$\int \frac{b_1(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}$$

se réduise, par une substitution rationnelle, à une intégrale elliptique de première espèce ; le degré de cette substitution peut être aussi grand qu'on le voudra.

2° Les seules substitutions rationnelles conduisant d'une intégrale hyperelliptique à une autre intégrale hyperelliptique de même genre sont les substitutions linéaires.

3° Il n'existe qu'un nombre *fini* de types de substitutions rationnelles conduisant d'une intégrale hyperelliptique de genre $p - 1$ à une intégrale hyperelliptique de genre $q - 1$ $(q > p)$.

4° Les coefficients d'un type réductible de genre $q - 1$, ramené à la forme normale dépendent au plus de $q - 1$ paramètres arbitraires.

7. Je considère le cas le plus simple, celui où $p = 2$, $q = 3$, qui correspond à des cas de réduction des intégrales hyperelliptiques du second genre. D'après un beau résultat, dû à M. Picard (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XI), s'il existe une intégrale de la forme

$$\int \frac{\alpha t + \beta}{\sqrt{Q(t)}} dt,$$

où $Q(t)$ est un polynôme du cinquième ou du sixième degré, qui ait seulement deux périodes, il en existe aussi une seconde. La méthode précédente fournit bien autant d'intégrales réductibles que l'on veut de cette forme, mais elle n'apprend rien sur l'existence de la seconde intégrale et n'indique aucun moyen pour la trouver.

Dans les cas les plus simples, ces deux intégrales se présentent assez facilement.

Exemple I. — Soit $D = 2$; posons toujours

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4),$$

et soit

$$x = \frac{lt^2 + mt + n}{l't^2 + m't + n'} = \varphi(t)$$

la substitution considérée. Pour que le polynôme correspondant $Q(t)$ soit du sixième degré, il faut et il suffit que l'une des équations $\varphi(t) = a_i$ ait une racine double. Ce polynôme $Q(t)$ jouira d'une propriété remarquable. On sait, en effet, que les deux racines t_1, t_2 de l'équation $\varphi(t) = \lambda$ sont liées, quel que soit λ, par une relation d'involution

$$(8) \qquad L t_1 t_2 + M(t_1 + t_2) + N = 0,$$

dont il serait facile d'avoir les coefficients. Les six racines du polynôme $Q(t)$, y compris $t = \infty$, si Q est du cinquième degré,

doivent donc pouvoir être associées deux par deux, de façon à vérifier une relation de la forme (8). Je dirai, pour abréger, que le polynôme $Q(t)$ est *symétrique*, et la définition s'étend évidemment à un polynôme de degré quelconque.

Tout polynôme symétrique peut être ramené, par une substitution linéaire, à ne contenir que les puissances paires de la variable. En effet, on peut ramener par la substitution

$$t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

les deux points doubles de l'involution (8) à coïncider avec les points o et ∞ et la relation (8) devient

$$z_1 + z_2 = 0.$$

Dans le cas actuel, les intégrales hyperelliptiques se ramènent aux deux suivantes

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^6 + Az^4 + Bz^2 + C}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^6 + Az^4 + Bz^2 + C}},$$

que la même substitution $z^2 = x$ réduit aux intégrales elliptiques.

Plus généralement, $Q(t)$ désignant un polynôme symétrique du sixième ordre, les deux intégrales

$$\int \frac{(t - u_1)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}, \quad \int \frac{(t - u_2)\,dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

où u_1, u_2 désignent les deux points doubles de l'involution (8), sont réductibles aux intégrales elliptiques par la substitution

$$\left(\frac{t - u_1}{t - u_2}\right)^2 = x.$$

A ce cas se rattache l'exemple de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 8), où

$$Q(t) = t(1 - t)(1 - at)(1 - bt)(1 - abt);$$

les trois couples de quantités o, ∞ ; $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$; 1, $\frac{1}{ab}$ vérifient en effet la relation $t_1 t_2 = \frac{1}{ab}$, qui est bien de la forme (8). Les points doubles de l'involution sont ici $+\frac{1}{\sqrt{ab}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$ et les intégrales

réductibles sont bien en effet

$$\int \frac{(1+\sqrt{abt})\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-at)(1-bt)(1-abt)}},$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{abt})\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-at)(1-bt)(1-abt)}}.$$

Étant donnée une forme binaire du sixième degré, on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que les racines soient en involution est exprimée par l'équation $E=0$; E désigne l'invariant gauche du quinzième ordre (SALMON, *Algèbre supérieure*, traduction Bazin, p. 198 et 247).

Exemple II. — Soit $D=3$. Les trois équations $\varphi(t)=a_2$, $\varphi(t)=a_3$, $\varphi(t)=a_1$ auront une racine simple et une racine double. Supposons de plus $a_1=0$, et supposons que l'équation $\varphi(t)=\infty$ ait aussi une racine double. On pourra, par une substitution linéaire effectuée sur t, prendre la transformation sur la forme suivante

$$x=\frac{t^3+at+b}{3t-p};$$

cette équation aura une racine double pour les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$(9)\qquad 4(3x-a)^3-27(b+px)^2=0.$$

Ces racines doubles appartiennent à l'équation

$$\frac{dx}{dt}=\frac{6t^3-3pt^2-(ap+3b)}{(3t-p)^2}=0.$$

Il suit de là que le premier membre de l'équation (9) doit être divisible par

$$[6t^3-3pt^2-(ap+3b)]^2.$$

On a, en effet, l'identité

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &4(3x-a)^3-27(b+px)^2\\ &\quad=[6t^3-3pt^2-(ap+3b)]^2[3t^3+3pt^2+4(ap+3b)]\times\frac{1}{(3t-p)^3}.\end{aligned}\right.$$

Si donc, dans la différentielle elliptique

$$\frac{dx}{\sqrt{x[4(3x-a)^3-27(b+px)^2]}},$$

on fait le changement de variable

$$(11) \qquad x = \frac{t^3 + at + b}{3t - p},$$

on trouve

$$\frac{dx}{\sqrt{x[4(3x-a)^3 - 27(b+px)^2]}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

où

$$Q(t) = (t^3 + at + b)[t^3 + pt^2 + \tfrac{3}{4}(ap + 3b)].$$

L'intégrale hyperelliptique de première espèce

$$(12) \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{(t^3 + at + b)(t^3 + pt^2 + q)}},$$

où l'on a

$$(13) \qquad q = 4b + \tfrac{4}{3}ap,$$

se ramène donc à une intégrale elliptique par le changement de variable (11). La seconde intégrale hyperelliptique

$$(14) \qquad \int \frac{t\,dt}{\sqrt{(t^3 + at + b)(t^3 + pt^2 + q)}}$$

se ramène aussi à une intégrale elliptique; car, si l'on pose $t = \frac{1}{u}$, elle devient

$$(15) \qquad \frac{-1}{\sqrt{bq}} \int \frac{du}{\sqrt{(u^3 + a'u + b')(u^3 + p'u^2 + q')}},$$

a', b', p', q' ayant respectivement pour valeurs

$$a' = \frac{p}{q}, \quad b' = \frac{1}{q}, \quad p' = \frac{a}{b}, \quad q' = \frac{1}{b}.$$

Mais de la relation (13) on tire aussi

$$\frac{1}{b} = \frac{4}{q} + \frac{4}{3}\frac{ap}{bq},$$

c'est-à-dire

$$q' = 4b' + \tfrac{4}{3}p'a'.$$

La nouvelle intégrale (15) est donc de même forme que l'intégrale (12) et par suite se ramènera aussi à une intégrale elliptique. On verrait par un calcul identique au précédent que l'intégrale (14)

se réduit, par la substitution

$$(16) \qquad \frac{t^3+pt^2+q}{at^3-3bt^2}=x,$$

à l'intégrale elliptique

$$(17) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x[4(p+3bx)^3+27q(1-ax)^2]}}.$$

Les substitutions (11) et (16) s'appliquent aux intégrales (12) et (14) alors même que quelques-unes des quantités a, a', b seraient nulles. Si l'on suppose b différent de zéro, on pourra prendre $b=1$ et il ne restera en réalité que deux paramètres arbitraires a et p. Si b est nul, on pourra prendre $a=-1$ et il n'y aura qu'un seul paramètre arbitraire. Si l'on change ensuite t en $\frac{1}{z}$, on trouve que les deux intégrales

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

où

$$R(z)=(z^2-1)(4z^3-3z+l),$$

se ramènent à des intégrales elliptiques : résultat que l'on doit à M. Hermite. Les substitutions propres à réduire ces intégrales se déduisent bien simplement des précédentes. Ainsi l'on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x[(x-l)^2-1]}}=3\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(4z^3-3z+l)}},$$

en posant

$$x=4z^3-3z+l$$

et

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x[4(lx-1)^3+27x^2]}}=\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(z^2-1)(4z^3-3z+l)}},$$

en posant

$$x=\frac{z^2-1}{z^3+l^2}.$$

Exemple III. — Soit $D=4$. On obtiendra une substitution indécomposable du quatrième degré, conduisant à une intégrale hyperelliptique du second genre, en considérant une fonction rationnelle $\varphi(t)$ telle que l'une des équations $\varphi(t)=a_i$ ait deux racines doubles et les trois autres deux racines simples et une racine

double. On pourra prendre, en supposant $a_1 = 0$,

$$x = \varphi(t) = \frac{(t^2 + at + b)^2}{t^2 + ct + d},$$

et prendre pour a_2, a_3, a_4 les trois autres valeurs de x, sauf 0 et ∞, pour lesquelles l'équation précédente a une racine double; mais la méthode ne donne pas la seconde intégrale irréductible.

Voici à cet égard le résultat qui a été obtenu tout récemment par M. O. Bolza (*Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg*).

Soient α, β, γ trois paramètres arbitraires et α', β', γ' les trois fonctions suivantes de ces paramètres :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha' &= \frac{-18\alpha^2\gamma - 4\alpha\beta^2 + 12\beta\gamma}{27\gamma^2 + 27\alpha\beta\gamma + 8\beta^3}, \\ \beta' &= \frac{-3\alpha^2\beta + 9\alpha\gamma + 8\beta^2}{27\gamma^2 + 27\alpha\beta\gamma + 8\beta^3}, \\ \gamma' &= \frac{-2\alpha^3 + 4\alpha\beta + 4\gamma}{27\gamma^2 + 27\alpha\beta\gamma + 8\beta^3}. \end{aligned}\right.$$

Posons en outre

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} R(x, \alpha, \beta, \gamma) = {}& \gamma' x^6 - 3\alpha\gamma' x^5 + (4\beta\gamma' - \alpha\beta')x^4 \\ & - (\alpha\alpha' + 5\gamma\gamma')x^3 + (4\beta'\gamma - \alpha'\beta)x^2 - 3\alpha'\gamma x + \gamma; \end{aligned}\right.$$

les deux intégrales

$$(20)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{R(x, \alpha, \beta, \gamma)}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x, \alpha, \beta, \gamma)}}$$

se ramènent à des intégrales elliptiques par des substitutions rationnelles du quatrième degré. On a en effet, pour la première,

$$(21)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{R(x, \alpha, \beta, \gamma)}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{R_1(z, \alpha, \beta, \gamma)}},$$

où

$$\begin{aligned} R_1(z, \alpha, \beta, \gamma) = {}& (\alpha z + 2\gamma)\gamma' z^3 + \left(-\tfrac{27}{4}\alpha^2\gamma' + 6\beta\gamma' - \alpha\beta'\right)z^2 \\ & + (-27\alpha\gamma\gamma' + 12\beta'\gamma - 4\alpha'\beta)z + \gamma(4\beta\beta' - 3\alpha\alpha') \end{aligned}$$

et

$$(22)\quad z = \frac{2\alpha x^4 - 4\alpha\gamma x - 2\beta\gamma}{2\alpha x^2 + 2\alpha^2 x + (\alpha\beta + \gamma)}.$$

Maintenant, si l'on observe que α, β, γ s'expriment de la même manière, au moyen des quantités α', β', γ' que α', β', γ' au moyen

de α, β, γ, on voit immédiatement que par le changement de x en $\frac{1}{x}$ la seconde intégrale reproduira $-\int \frac{dx}{\sqrt{R(x, \alpha', \beta', \gamma')}}$. Il en résulte que

$$(23) \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x, \alpha, \beta, \gamma)}} = -\frac{\sqrt{\alpha'}}{2} \int \frac{dz'}{\sqrt{R_1(z', \alpha', \beta', \gamma')}},$$

en posant

$$(24) \qquad z' = \frac{2\alpha' - 4\alpha'\gamma' x^2 - 2\beta'\gamma' x^4}{2\alpha' x^4 + 2\alpha'^2 x^3 + (\alpha'\beta' + \gamma') x^4}.$$

Pour ne laisser que deux paramètres arbitraires, il suffira de faire

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = k, \quad \frac{\gamma}{\alpha^3} = \lambda, \quad x = \alpha t.$$

Exemple IV. — Soit $D = 5$. Soit $x = \varphi(t)$ une substitution rationnelle répondant à la question; pour trois valeurs particulières de x l'équation $\varphi(t) = x$ devra avoir deux racines doubles et une racine simple. Par deux substitutions linéaires effectuées à la fois sur x et sur t, on peut faire que ces trois valeurs de x soient 0, 1, ∞ et que les racines simples des trois équations $\varphi(t) = 0$, $\varphi(t) = 1$, $\varphi(t) = \infty$ soient elles-mêmes 0, 1, ∞. On aura donc une identité de la forme

$$P^2 - tQ^2 = (t - 1)R^2,$$

P, Q, R étant trois fonctions entières du second degré. Par un calcul qu'il est inutile de reproduire, on trouve facilement la formule

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} &[(2\alpha - 1)t^2 + (2\alpha\beta - \alpha^2 - 2\beta)t - \beta^2]^2 \\ &\quad - t[t^2 + (\alpha^2 + 2\beta - 2\alpha)t + \beta^2 - 2\alpha\beta]^2 = (1 - t)[t^2 + (2\beta - \alpha^2)t + \beta^2]^2, \end{aligned} \right.$$

et la fonction $\varphi(t)$ se déduira de cette identité par une substitution linéaire.

8. Prenons encore le cas de $p = 2$, $q = 4$. La transformation la plus générale du second degré conduit d'une intégrale elliptique à une intégrale hyperelliptique de genre 3, où le polynôme $Q(t)$ sera symétrique.

Inversement, si $Q(t)$ est un polynôme symétrique du huitième

degré, il existe une intégrale hyperelliptique correspondante qui se réduit à une intégrale elliptique. Nous avons vu en effet que par un changement linéaire de variable on pouvait ramener $Q(t)$ à n'avoir que des termes de degré pair. Des trois intégrales de première espèce

$$\int \frac{dt}{\sqrt{Q(t)}}, \quad \int \frac{t\,dt}{\sqrt{Q(t)}}, \quad \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

il est clair que la seconde se réduit à une intégrale elliptique par la substitution $t^2 = x$ et que les deux autres se ramènent à des intégrales hyperelliptiques de genre 2 par la même substitution.

Soit

$$Q(t) = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2)(1 - l^2 t^2)(1 - m^2 t^2);$$

on aura, en posant $t^2 = x$,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{Q(t)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)}},$$

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{Q(t)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)}},$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{Q(t)}} = \frac{1}{2} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)}}.$$

Si k^2, l^2, m^2 sont quelconques, il n'y aura pas d'intégrales de première espèce contenant l'irrationalité

$$\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)}$$

qui se réduise, par une substitution algébrique, à une intégrale elliptique. Donc il n'y aura pas non plus d'autre intégrale réductible aux intégrales elliptiques parmi celles qui contiennent l'irrationalité $\sqrt{Q(t)}$.

En général, si le polynôme $Q(t)$ est symétrique et de degré $2q$, on pourra le ramener à n'avoir que des termes de degré pair. Toutes les intégrales de première espèce correspondantes se ramènent par la substitution $t^2 = x$ à des intégrales hyperelliptiques de genre $\frac{q-1}{2}$ ou $\frac{q-1}{2} - 1$, si q est impair, et à des intégrales de genre $\frac{q}{2}$ ou $\frac{q}{2} - 1$, si q est pair.

En combinant les différents cas de réduction connus, on par-

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique,* qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tout les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin,* sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, êtr remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel.*

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Le Bulletin paraît mensuellement.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. Poincaré, rue Gay-Lussac, 66.

TOME XIII. — N° 6 ET DERNIER.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1885

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième vendredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Jours d'ouverture de la Bibliothèque : lundi, mercredi, vendredi, de 11 à 5 heures.

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des Mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

---

vient à de nouveaux cas offrant un plus grand nombre d'intégrales réductibles.

Tel serait le cas d'un polynôme de degré pair tel que les racines puissent être associées deux à deux de plusieurs manières différentes, de façon à vérifier une relation d'involution, polynôme que l'on pourrait appeler *doublement symétrique*. Ainsi, dans le cas de l'irrationalité $\sqrt{t(1-t)(1+t)(1+at)(1-at)}$, on peut associer les six quantités 0, 1, -1, $\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{a}$, ∞ de façon à vérifier soit la relation $t_1 t_2 = \frac{1}{a}$, soit la relation $t_1 t_2 = -\frac{1}{a}$. On aura donc quatre intégrales réductibles

$$\int \frac{1 \pm \sqrt{at}}{\sqrt{t(1-t)(1+t)(1+at)(1-at)}},$$
$$\int \frac{1 \pm \sqrt{a}\sqrt{-1}\, t}{\sqrt{t(1-t)(1+t)(1+at)(1-at)}} dt.$$

D'après un théorème de M. Poincaré (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. C), il y en aura une infinité.

Tel serait le cas d'un polynôme du huitième degré

$$Q(t) = (1-t^2)(1-k^2t^2)(1-l^2t^2)(1-k^2l^2t^2);$$

en posant $t^2 = x$, l'intégrale $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{Q(t)}}$ se réduit, comme nous l'avons déjà remarqué, à une intégrale elliptique, tandis que les deux intégrales

$$\int \frac{(1 \pm klt^2)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}$$

deviennent

$$\frac{1}{2}\int \frac{(1 \pm klx)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-k^2l^2x)}}$$

et rentrent dans l'exemple de Jacobi. Une nouvelle substitution rationnelle du second degré les ramènera donc aux intégrales elliptiques.

D'un autre côté, les deux substitutions linéaires

$$t = \frac{1}{\sqrt{kl}}\,\frac{1+z}{1-z}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{kl}}\,\frac{1+z}{1-z}$$

conduisent du polynôme $Q(t)$ à un polynôme de degré pair en z de même forme que $Q(t)$. On connaîtra donc dans ce cas *neuf* intégrales réductibles par des substitutions rationnelles aux intégrales elliptiques dont trois par des substitutions du deuxième degré et six par des substitutions du quatrième degré. D'après le théorème de M. Poincaré, il y en aura encore une infinité. Il me paraît superflu de multiplier davantage les exemples.

Une théorie toute semblable est applicable aux intégrales

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad \int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}(x-1)^{\frac{1}{2}}};$$

il existe une infinité d'intégrales abéliennes de la forme

$$\int \frac{f(t)\,dt}{(t-\alpha_1)^{\lambda_1}(t-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(t-\alpha_p)^{\lambda_p}},$$

qui se déduisent par des substitutions rationnelles de l'une de ces intégrales, pour une valeur déterminée du nombre entier p. La démonstration se trouve implicitement contenue dans le Mémoire déjà cité (*Annales de l'École Normale,* 3[e] série, t. II).

Sur la représentation des nombres par les formes;
par H. Poincaré.

(Séance du 28 mars 1885.)

Étant donnée une forme, c'est-à-dire un polynôme, homogène par rapport à plusieurs variables, et à coefficients entiers, donner à ces variables des valeurs entières, telles que la forme devienne égale à un nombre entier donné.

Ce problème est complètement résolu en ce qui concerne les formes quadratiques binaires; mais il y a encore beaucoup à dire à ce sujet, en ce qui concerne les formes plus compliquées.

PREMIÈRE PARTIE.

FORMES BINAIRES.

Représenter un nombre entier par une forme binaire, c'est un problème dont la solution est contenue explicitement ou implicitement dans les travaux de :

MM. Eisenstein (*Journal de Crelle*, t. 28).
Hermite (*Journal de Crelle*, t. 42 et 47).
Kummer (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XVI).
Dedekind (*Mémoire sur les nombres entiers algébriques*. Paris, Gauthier-Villars, 1877).

Je crois pourtant qu'il est encore possible d'approfondir et d'éclaircir cette solution.

Méthode générale.

Nous adopterons la terminologie et les notations de M. Dedekind, que je vais rappeler.

Soit une équation algébrique

$$\alpha^m - A_{m-1}\alpha^{m-1} + A_{m-2}\alpha^{m-2} - \ldots \pm A_1\alpha \mp A_0 = 0 \tag{1}$$

à coefficients entiers. Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

ses racines. Un nombre entier complexe sera une expression de la forme

$$x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_1^2 + \ldots + x_{m-1}\alpha_1^{m-1}.$$

Nous l'appellerons x pour abréger. Sa norme sera le produit

$$(x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_1^2 + \ldots + x_{m-1}\alpha_1^{m-1})(x_0 + x_1\alpha_2 + x_2\alpha_2^2 + \ldots + x_{m-1}\alpha_2^{m-1})\ldots \times (x_0 + x_1\alpha_m + \ldots + x_{m-1}\alpha_m^{m-1}).$$

Un module sera le système des nombres complexes

$$x^{(1)}m_1 + x^{(2)}m_2 + \ldots + x^{(n)}m_n,$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ peuvent prendre toutes les valeurs entières,

positives ou négatives. Nous le représenterons par la notation

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & \ldots & x_0^{(n)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1}^{(1)} & x_{m-1}^{(2)} & \ldots & x_{m-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Si $n = m$, la norme de ce module sera la valeur de l'expression (2) considérée comme un déterminant.

Un idéal sera un module, tel que $n = m$, et que le produit d'un nombre complexe quelconque appartenant au module, par un nombre entier complexe quelconque, appartienne également au module.

Cela posé, envisageons une forme quelconque

$$F = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} y + \ldots + B_1 x y^{m-1} + B_0 y^m,$$

et supposons qu'on cherche à représenter à l'aide de cette forme le nombre entier N.

L'égalité

$$F = N$$

peut s'écrire, en posant

$$B_m x = x_1,$$

$$x_1^m + B_{m-1} x_1^{m-1} y + B_{m-2} B_m x_1^{m-2} y^2 + \ldots$$
$$+ B_1 B_m^{m-2} x_1 y^{m-1} + B_0 B_m^{m-1} y^m = B_m^{m-1} N.$$

Supposons que l'on ait choisi l'équation (1), de telle sorte que

$$A_{m-1} = B_{m-1}, \quad A_{m-2} = B_{m-2} B_m, \quad \ldots, \quad A_1 = B_1 B_m^{m-2}, \quad A_0 = B_0 B_m^{m-1}.$$

On cherchera à représenter le nombre $B_m^{m-1} N$ par la forme

$$\Phi = x^m + A_{m-1} x^{m-1} y + A_{m-2} x^{m-2} y^2 + \ldots + A_1 y + A_0.$$

On trouvera par exemple que l'on a

$$\Phi = B_m^{m-1} N,$$

en faisant

$$x = a, \quad y = b.$$

On examinera si a est divisible par B_m; s'il ne l'est pas, on rejettera le système de solutions; s'il l'est, on saura que l'on obtient l'égalité

$$F = N$$

en faisant

$$x = \frac{a}{B_m}, \quad y = b.$$

Le problème est donc ramené au suivant : *Représenter un nombre entier par la forme*

$$\Phi = (x + \alpha_1 y)(x + \alpha_2 y)\ldots(x + \alpha_m y) = \text{norme}(x + \alpha_1 y).$$

On résoudra le problème plus général : *Représenter un nombre entier par la forme*

$$\Psi = \text{norme}(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \ldots + \alpha_1^{m-1} x_{m-1}),$$

qui contient m indéterminées $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.

Supposons qu'on l'ait résolu et qu'on ait trouvé que la forme Ψ représente le nombre entier proposé, si l'on y fait

$$x_0 = \beta_0, \quad x_1 = \beta_1, \quad x_2 = \beta_2, \quad x_3 = \beta_3, \quad \ldots, \quad x_{m-1} = \beta_{m-1}.$$

Si l'on a

$$\beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_{m-1} = 0,$$

on saura que Φ devient égal au nombre entier proposé quand on y fait

$$x = \beta_0, \quad y = \beta_1,$$

sinon on rejettera la solution.

Le problème est donc ramené au suivant : *Substituer à la place de* $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ *des nombres entiers, tels que* Ψ *devienne égal à un nombre donné.*

Supposons le problème résolu, soit N le nombre donné. Soit

$$\Psi(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) = N.$$

Le système des nombres complexes

$$(3) \qquad (x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_1^{m-1} x_{m-1})(m_0 + \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_1^{m-1} m_{m-1}),$$

où

$$m_0, \ m_1, \ \ldots, \ m_{m-1}$$

sont des entiers indéterminés, est un idéal de norme N. Ce sera un *idéal principal.* On formera donc tous les idéaux de norme N. Soit

$$(4) \qquad y^{(1)}\mu_1 + y^{(2)}\mu_2 + \ldots + y^{(m)}\mu_m$$

l'un de ces idéaux. On doit chercher si c'est un idéal principal ; et

dans le cas où c'en est un, on doit chercher à le ramener à la forme (3); quand il sera ramené à cette forme, on aura les valeurs cherchées de $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$.

La norme d'un nombre complexe contenu dans la formule (3) est égale à

$$(5) \qquad \mathrm{N}\,\Psi(m_0, m_1, \ldots, m_{m-1}).$$

Quant à

$$(6) \qquad \text{norme}(y^{(1)}\mu_1 + y^{(2)}\mu_2 + \ldots + y^{(m)}\mu_m),$$

c'est une forme de degré m, avec les m indéterminées

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m.$$

Par la méthode de M. Hermite, on reconnaîtra si les formes (5) et (6) sont équivalentes. Si elles ne le sont pas, (4) n'est pas un idéal principal et il n'y a pas à s'en occuper. Si elles le sont, on passera de l'une à l'autre, en posant

$$\mu_i = \lambda_{i,0} m_0 + \lambda_{i,1} m_1 + \lambda_{i,2} m_2 + \ldots + \lambda_{i\ m-1} m_{m-1}.$$

L'expression (4) deviendra alors

$$(7) \qquad \sum_{i=0}^{i=m-1} m_i(y^{(1)}\lambda_{1\ i} + y^{(2)}\lambda_{2,i} + \ldots + y^{(m)}\lambda_{m\ i}).$$

Les expressions (3) et (7) devront être identiques, ce qui donnera pour les valeurs cherchées de $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0^{(1)}\lambda_{1,0} + y_0^{(2)}\lambda_{2,0} + y_0^{(3)}\lambda_{3,0} + \ldots + y_0^{(m)}\lambda_{m,0}, \\ x_1 &= y_1^{(1)}\lambda_{1,0} + y_1^{(2)}\lambda_{2,0} + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_1^{(m)}\lambda_{m,0}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{m-1} &= y_{m-1}^{(1)}\lambda_{1,0} + \lambda_{m-1}^{(2)}\lambda_{2,0} + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_{m-1}^{(m)}\lambda_{m,0}. \end{aligned}$$

En résumé, pour chercher si le nombre N peut être représenté par la forme F, on cherchera si le nombre $\mathrm{B}_m^{m-1}\mathrm{N}$ peut être représenté par la forme Ψ; à cet effet, on formera tous les idéaux de norme $\mathrm{B}_m^{m-1}\mathrm{N}$, et si

$$\mathrm{Y} = y^{(1)}\mu_1 + y^{(2)}\mu_2 + \ldots + y^{(m)}\mu_m$$

est l'un d'entre eux, on formera la forme

$$\text{norme}\,\mathrm{Y}$$

et l'on examinera si elle est équivalente à

$$\Psi B_m^{m-1} N$$

et quelle est la substitution qui permet de passer de l'une à l'autre. La connaissance de cette substitution donne immédiatement la solution du problème.

Le problème est donc ramené aux deux questions suivantes :

1° Former tous les idéaux de norme donnée;

2° Reconnaître si deux formes décomposables en facteurs linéaires sont équivalentes.

La deuxième question a été complètement résolue par M. Hermite. Nous n'avons donc à nous occuper pour le moment que de la première.

Formation des idéaux.

Soit un module quelconque

$$x^{(1)} m_1 + x^{(2)} m_2 + \ldots + x^{(n)} m_n.$$

Les nombres complexes $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ forment ce que M. Dedekind appelle la base de ce module. Ce module s'écrit, d'après la notation convenue,

$$(2) \qquad \left| \begin{matrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & \ldots & x_0^{(n)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1}^{(1)} & x_{m-1}^{(2)} & \ldots & x_{m-1}^{(n)} \end{matrix} \right| .$$

Il est clair qu'on pourrait donner au module une autre base, et par conséquent l'exprimer d'une infinité de manières sous la forme (2). On pourra, par exemple, dans le Tableau (2), ajouter à une colonne quelconque une autre colonne multipliée par un entier constant, ou bien encore supprimer une colonne entièrement formée de zéros. On arrivera ainsi, si $m < n$, à ramener l'expression du module à la forme simple

$$(8) \qquad \left| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{matrix} \right| .$$

J'ai écrit le Tableau (8) comme si m était égal à 4. Il m'arrivera

fréquemment, quand j'écrirai l'expression d'un module, de donner à m une valeur particulière, afin de mieux me faire entendre. Mais il restera entendu que ce que je dirai sera vrai pour toute valeur de m.

Quelles sont les conditions pour que le module

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$$

soit un idéal? Il faut que le produit d'un nombre quelconque de ce module par un nombre entier complexe quelconque (par exemple α_1) fasse partie du module.

Je dis que a, b, c, d, e sont divisibles par f. En effet, si

$$x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_1^2$$

est un nombre complexe appartenant au module (9), on aura

$$x_2 \equiv 0 \pmod{f}.$$

Or les nombres suivants

$$a\alpha_1^2, \quad b\alpha_1 + d\alpha_1^2$$

devront faire partie du module, ce qui exige

$$a \equiv d \equiv 0 \pmod{f}.$$

Il en sera de même de

$$(10)\qquad b\alpha_1^2 + d\alpha_1^3, \quad c\alpha_1 + e\alpha_1^2 + f\alpha_1^3, \quad c\alpha_1^2 + e\alpha_1^3 + f\alpha_1^4.$$

Mais, dans le cas particulier, l'équation (1) s'écrit

$$\alpha_1^3 = A_2\alpha_1^2 - A_1\alpha_1 + A_0,$$

de sorte que les trois nombres complexes (10) s'écrivent

$$\begin{gathered} dA_0 - dA_1\alpha_1 + (b + A_2 d)\alpha_1^2, \\ fA_0 + (c - fA_1)\alpha_1 + (e + A_2 f)\alpha_1^2, \\ (fA_2A_0 + eA_0) + (fA_0 - fA_2A_1 - eA_1)\alpha_1 + (c - fA_1 + fA_2^2 + eA_2)\alpha_1^2. \end{gathered}$$

S'ils font partie du module (9) on devra avoir

$$b + A_2 d \equiv e + A^2 f \equiv c - fA_1 + fA_2^2 + eA_2 \equiv 0 \pmod{f}.$$

d'où

$$b \equiv e \equiv c \equiv 0 \pmod{f}.$$

Je dis que a et b doivent être divisibles par d.

Car, si le nombre complexe

$$x_0 + x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_1^2$$

fait partie du module (9), on doit avoir

$$x_1 \equiv e \frac{x_2}{f} \pmod{d}.$$

Or les nombres

$$a\alpha_1,\quad b\alpha_1 + d\alpha_1^2$$

font partie du module (9).

On a donc

$$a \equiv 0,\quad b \equiv e \frac{d}{f} \pmod{d},$$

mais $\frac{e}{f}$ est un nombre entier; on a donc

$$b \equiv 0 \pmod{d}.$$

De même, pour que le module (8) soit un idéal, il faut

$$\begin{array}{ll} a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv b_4 \equiv c_3 \equiv c_4 \equiv 0 & \pmod{d_4}, \\ a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv 0 & \pmod{c_3}, \\ a_1 \equiv a_2 \equiv 0 & \pmod{b_2}. \end{array}$$

En général, dans un Tableau tel que (8), le dernier chiffre significatif de chaque colonne est sur la diagonale qui va de l'angle supérieur gauche du Tableau à l'angle inférieur droit. Si le module correspondant est un idéal, tous les chiffres d'une colonne seront divisibles par le dernier chiffre significatif de cette colonne, et le dernier chiffre significatif de chaque colonne est divisible par le dernier chiffre significatif de la colonne suivante.

Je dirai qu'un idéal est *simple* si le dernier chiffre significatif de chaque colonne, sauf la première, est l'unité; par exemple, l'idéal suivant

$$\left|\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

sera simple.

Je dirai qu'il est *primitif* si le dernier chiffre significatif des K premières colonnes est un même nombre a, et si celui des m — K dernières colonnes est l'unité.

Par exemple, l'idéal suivant

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

sera primitif.

Envisageons d'abord les idéaux primitifs; je dis qu'un idéal primitif quelconque

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} a & \alpha & c & f & l \\ 0 & a & b & e & k \\ 0 & 0 & 1 & d & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

peut toujours être ramené à la forme (11). En effet, α devant être divisible par a, on remplacera α par zéro en retranchant de la deuxième colonne la première, multipliée par un nombre entier. On peut donc toujours supposer

$$\alpha = 0.$$

Le nombre

$$c + b\alpha_1 + \alpha_1^2$$

faisant partie de l'idéal (12), les nombres

$$c\alpha_1 + b\alpha_1^2 + \alpha_1^3,$$
$$c\alpha_1^2 + b\alpha_1^3 + \alpha_1^4$$

devront aussi en faire partie. Le module (11) sera donc divisible par le module (12); or ces deux modules ont même norme; donc ils sont identiques.

Cherchons maintenant la condition pour que le module (11) soit un idéal. Pour cela, il faut et il suffit que tous ses nombres complexes multipliés par α_1 fassent aussi partie du module (11). Mais il suffit de vérifier ce résultat pour les nombres de la base, et

parmi eux pour les nombres

$$a\alpha_1,\quad c\alpha_1^2 + b\alpha_1^3 + \alpha_1^4,$$

car il est tout vérifié pour les autres.

Donc, pour que le module (11) soit un idéal, il faut et il suffit que

$$a\alpha_1^2 \text{ et } c\alpha_1^3 + b\alpha_1^4 + \alpha_1^5$$

fassent partie de ce module.

Comme on a identiquement

$$a\alpha_1^2 = a(c + b\alpha_1 + \alpha_1^2) - b(a\alpha_1) - c(a),$$

le nombre $a\alpha_1^2$ fera toujours partie du module. Occupons-nous donc du nombre

$$c\alpha_1^3 + b\alpha_1^4 + \alpha_1^5.$$

L'équation (1) s'écrivant ici

$$\alpha_1^5 = A_4\alpha_1^4 - A_3\alpha_1^3 + A_2\alpha_1^2 - A_1\alpha_1 + A_0,$$

ce nombre est égal à

$$A_0 + A_1\alpha_1 + A_2\alpha_1^2 + (c - A_3)\alpha_1^3 + (b + A_4)\alpha_1^4.$$

S'il fait partie du module (11), il devra pouvoir se mettre sous la forme

$$a(\lambda_0 + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_1^2 + \lambda_3\alpha_1^3 + \lambda_4\alpha_1^4) + (c + b\alpha_1 + \alpha_1^2)(\mu_0 + \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_1^2),$$

les λ et les μ étant des nombres entiers.

Si nous convenons d'écrire

$$x_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_{m-1}\alpha_1^{m-1} \equiv 0 \pmod{a}$$

quand

$$x_0 \equiv x_1 \equiv \ldots \equiv x_{m-1} \equiv 0 \pmod{a},$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{r} A_0 - A_1\alpha_1 + A_2\alpha_1^2(c - A_3)\alpha_1^3 + (b + A_4)\alpha_1^4 \\ -(c + b\alpha_1 + \alpha_1^2)(\mu_0 + \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_1^2) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{a}$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{r} A_0 - A_1\alpha_1 + A_2\alpha_1^2 - A_3\alpha_1^3 + A_4\alpha_1^4 - \alpha_1^5 \\ -(c + b\alpha_1 + \alpha_1^2)(\mu_0 + \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_1^2 - \alpha_1^3) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{a},$$

c'est-à-dire que, si l'on envisage la congruence

$$(13)\qquad \xi^5 - A_4\xi^4 + A_3\xi^3 - A_2\xi^2 + A_1\xi - A_0 \equiv 0 \pmod{a},$$

elle peut se réduire en deux autres, et que l'une d'elles est

$$\xi^2 + b\xi + c \equiv 0 \pmod{a}. \tag{14}$$

Donc, pour que le module (11) soit un idéal, il faut et il suffit que le premier membre de (14) soit un facteur du premier membre de (13), suivant le module a.

Un idéal peut être toujours mis sous la forme

$$x^{(1)}(m_{0,1} + m_{1,1}\alpha_1 + \ldots + m_{m-1,1}\alpha_1^{m-1}) + \ldots$$
$$+ x^{(p)}(m_{0,p} + m_{1,p}\alpha_1 + \ldots + m_{m-1,p}\alpha_1^{m-1}).$$

Les nombres $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}$ forment alors sa trame.

Par exemple, la trame de l'idéal (11) se composera des deux nombres

$$a \text{ et } c + b\alpha_1 + \alpha_1^2,$$

parce que tout nombre entier complexe faisant partie de l'idéal est la somme d'un multiple du premier et d'un multiple du second.

Un idéal est déterminé quand on connaît sa trame. La trame d'un idéal principal se compose d'un seul nombre.

On déduit de ce qui précède la règle suivante pour former tous les idéaux primitifs.

On remplacera dans le premier membre de (1) α_1 par ξ et l'on considérera l'expression ainsi obtenue comme le premier membre d'une congruence suivant un module quelconque a.

Si cette congruence n'est pas irréductible, on envisagera l'un quelconque des facteurs de son premier membre

$$\xi^p + \beta_{p-1}\xi^{p-1} + \beta_{p-2}\xi^{p-2} + \ldots + \beta_1\xi + \beta_0. \tag{15}$$

On y remplacera ξ par α_1 et l'on obtiendra ainsi un nombre complexe qui formera avec a la trame de l'idéal cherché.

Il faut ajouter aux idéaux ainsi obtenus les idéaux principaux qui ont pour trame un nombre entier réel a et qui s'écriraient

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Cherchons à appliquer cette règle au problème suivant :

Former tous les idéaux simples de norme a.

L'idéal cherché devra être de la forme

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} a & -\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Quant à ξ, ce sera une racine réelle de la congruence

$$(17)\qquad \xi^5 - A_4\xi^4 + A_3\xi^3 - A_2\xi^2 + A_1\xi - A_0 \equiv 0 \pmod{a}.$$

Tout nombre faisant partie de l'idéal (16) sera de la forme

$$(18)\qquad am_0 + (\alpha_1 - \xi)(m_1 + \alpha_1 m_2 + \alpha_1^2 m_3 + \alpha_1^3 m_4).$$

Si, dans ce nombre, on remplace α_1 par ξ, on obtient un nombre entier divisible par a. Réciproquement, soit

$$x = x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_1^2 + x_3\alpha_1^3 + x_4\alpha_1^4$$

un nombre entier complexe qui devient égal à un nombre entier divisible par a quand on y remplace α_1 par ξ. On aura identiquement

$$\begin{aligned} x = {} & x_0 + x_1\xi + x_2\xi^2 + x_3\xi^3 + x_4\xi^4 \\ & + (\alpha_1 - \xi)[x_1 + x_2(\alpha_1 + \xi) + x_3(\alpha_1^2 + \alpha_1\xi + \xi^2) + x_4(\alpha_1^3 + \alpha_1^2\xi + \alpha_1\xi^2 + \xi^3)], \end{aligned}$$

qui devient égal à l'expression (18) quand on fait

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{a}(x_0 + x_1\xi + x_2\xi^2 + x_3\xi^3 + x_4\xi^4), \\ m_1 &= x_1 + x_2\xi + x_3\xi^2 + x_4\xi^3, \\ m_2 &= x_2 + x_3\xi + x_4\xi^2, \\ m_3 &= x_3 + x_4\xi, \\ m_4 &= x_4. \end{aligned}$$

Le nombre x fait donc partie de l'idéal (16). Nous désignerons donc souvent cet idéal par la notation abrégée

$$(a, \xi).$$

Considérons maintenant l'idéal (11) et supposons d'abord que a soit une puissance d'un nombre premier, et que la congruence

$$(19)\qquad \xi^2 + b\xi + c \equiv 0 \pmod{a}$$

ait deux racines réelles ξ_1 et ξ_2.

Tout nombre faisant partie de l'idéal (11) sera de la forme

$$a(m_0+m_1\alpha_1)+(1+b\alpha_1+c\alpha_1^2)(m_2+m_3\alpha_1+m_4\alpha_1^2)$$

et, si l'on y remplace α_1 par ξ_1 par exemple, on aura

$$a(m_0+m_1\xi_1)+(1+b\xi_1+c\xi_1^2)(m_2+m_3\xi_1+m_4\xi_1^2)\equiv 0 \pmod{a}.$$

Si donc

$$x=x_0+x_1\alpha_1+x_2\alpha_1^2+x_3\alpha_1^3+x_4\alpha_1^4$$

appartient à l'idéal (11), on aura

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0+x_1\xi_1+x_2\xi_1^2+x_3\xi_1^3+x_4\xi_1^4\equiv 0 \\ x_0+x_1\xi_2+x_2\xi_2^2+x_3\xi_2^3+x_4\xi_2^4\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{a}.$$

Réciproquement, si l'on a les congruences (20), le nombre x appartiendra à l'idéal (11), comme il est aisé de le vérifier.

Supposons que la congruence (19) ait ses racines imaginaires; je dirai encore que, pour que x appartienne à l'idéal (11), il faut et il suffit que les congruences (20) aient lieu. Mais quel sera alors le sens de ces congruences où entrent des imaginaires? On remplacera les congruences (20) par les congruences (21)

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{r} 2x_0+x_1(\xi_1+\xi_2)+x_2(\xi_1^2+\xi_2^2)+x_3(\xi_1^3+\xi_2^3)+x_4(\xi_1^4+\xi_2^4)\equiv 0 \\ x_0(\xi_1+\xi_2)+x_1(\xi_1^2+\xi_2^2)+x_2(\xi_1^3+\xi_2^3)+x_3(\xi_1^4+\xi_2^4)+x_4(\xi_1^5+\xi_2^5)\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{a}.$$

Si ξ_1 et ξ_2 sont imaginaires, toute fonction symétrique de ξ_1 et ξ_2 sera un nombre entier réel. Les congruences (21) ont donc toujours un sens. Quand ξ_1 et ξ_2 sont réels, les systèmes (20) et (21) sont équivalents. Nous dirons qu'ils le sont encore quand ξ_1 et ξ_2 sont imaginaires. Dans ce sens, on pourra dire que, pour que x appartienne à (11), il faut et il suffit que les congruences (20) soient satisfaites.

Supposons maintenant que a soit un nombre quelconque; la congruence (19) peut avoir plus de deux racines réelles. Si l'on en choisit deux telles que

$$\xi^2+b\xi+c\equiv(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2) \pmod{a}.$$

ce qui est toujours possible; on trouvera encore que la condition nécessaire et suffisante pour que x fasse partie de (11), c'est que les congruences (20) soient satisfaites.

PROBLÈME. — *Former tous les idéaux primitifs.*

On prendra un nombre quelconque a. On envisagera la congruence

$$(22)\quad F(\xi) = \xi^m - A_{m-1}\xi^{m-1} + A_{m-2}\xi^{m-2} - \ldots \pm A_1\xi \mp A_0 \equiv 0 \pmod{a}.$$

On choisira m racines réelles ou imaginaires

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m$$

de cette congruence, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$F(\xi) \equiv (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\ldots(\xi - \xi_m) \pmod{a}.$$

Parmi ces racines $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, il y en aura d'imaginaires; mais ces imaginaires se répartiront en cycles, de telle façon que tout polynôme entier symétrique de toutes les racines d'un même cycle soit un nombre entier réel. Si donc l'un des cycles est formé, par exemple, des racines

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_q,$$

le produit

$$(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\ldots(\xi - \xi_q)$$

sera réel.

Cela posé, on choisira au hasard p racines de la congruence (22), par exemple

$$(23)\qquad \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_p,$$

mais de telle sorte que, si une racine imaginaire fait partie du système (23), il en soit de même de toutes les racines du cycle. On formera les congruences

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0 + x_1\xi_1 + x_2\xi_1^2 + \ldots + x_{m-1}\xi_1^{m-1} \equiv 0 \\ x_0 + x_1\xi_2 + x_2\xi_2^2 + \ldots + x_{m-1}\xi_2^{m-1} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_0 + x_1\xi_p + x_2\xi_p^2 + \ldots + x_{m-1}\xi_p^{m-1} \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{a}.$$

Si ces congruences sont satisfaites, le nombre

$$x = x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_1^2 + \ldots + x_{m-1}\alpha_1^{m-1}$$

appartiendra à un certain idéal primitif que je désignerai par la notation abrégée

$$(a,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_p).$$

On obtiendra de la sorte tous les idéaux primitifs.

Idéaux premiers.

L'idéal

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

est-il un idéal premier? Pour cela il faut d'abord que a soit premier; car, s'il était divisible par un nombre entier b, l'idéal (25) serait divisible par l'idéal

$$\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}.$$

Il faut en outre que la congruence

$$(26)\qquad \xi^4 - A_3\xi^3 + A_2\xi^2 - A_1\xi + A_0 \equiv 0 \pmod{a}$$

soit irréductible; car, si l'on avait identiquement, par exemple,

$$\xi^4 - A_3\xi^3 + A_2\xi^2 - A_1\xi + A_0 \equiv (\xi^2 + b\xi + c)(\xi^2 + b'\xi + c') \pmod{a},$$

l'idéal (25) serait divisible par l'idéal

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ces conditions sont suffisantes. Pour que (25) soit premier, il faut et il suffit que a soit premier et que la congruence (26) soit irréductible.

A part les idéaux premiers ainsi trouvés, je dis que tout idéal premier est primitif. Je dis que l'idéal

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} abc & dba & eba & ha & ma \\ 0 & ab & fba & ka & na \\ 0 & 0 & ab & la & pa \\ 0 & 0 & 0 & a & qa \\ c & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

ne peut être premier.

1° Il est divisible par

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Pour qu'il soit premier, il faut donc d'abord

$$a = 1.$$

Supposons cette condition remplie.

2° Il est divisible par l'idéal

$$(29) \qquad \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & b & 0 & k & h \\ 0 & 0 & b & l & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

En effet, les nombres

$$b(\alpha_1 + d)\alpha_1, \ (\alpha_1^3 + l\alpha_1^2 + k\alpha_1 + h)\alpha_1$$

devant faire partie de l'idéal (27), cet idéal divise

$$(28) \qquad \begin{vmatrix} bc & bd & 0 & h & 0 \\ 0 & b & bd & k & h \\ 0 & 0 & b & l & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Je tiens compte de la condition $a = 1$.)

Mais (27) et (28) ont même norme; donc ils sont identiques. Or il est clair que (29) divise (28).

Donc (27) n'est pas premier. C. Q. F. D.

Considérons donc un idéal primitif quelconque

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Que faut-il pour qu'il soit premier?

Il faut d'abord que a soit premier; car, si a était divisible par p,

(30) serait divisible par

$$\begin{vmatrix} p & 0 & c & 0 \\ 0 & p & b & c \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

Il faut ensuite que la congruence

$$\xi^2 + b\xi + c \equiv 0 \pmod{a}$$

soit irréductible; car, si l'on avait, par exemple,

$$\xi^2 + b\xi + c \equiv (\xi + \xi_1)(\xi + \xi_2) \pmod{a}$$

(30) serait divisible par

$$\begin{vmatrix} a & \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

ces conditions sont suffisantes.

Problème. — *Former tous les idéaux premiers.*

On égalera a à un nombre premier P quelconque; on décomposera le premier membre de la congruence (22) en facteurs irréductibles. Soit

(31) $$\xi^p + a_{p-1}\xi^{p-1} + a_{p-2}\xi^{p-2} + \ldots + a_1\xi + a_0$$

l'un de ces facteurs. Supposons que, décomposé en facteurs imaginaires, il s'écrive

$$(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\ldots(\xi - \xi_p),$$

l'idéal

$$(P, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$$

sera premier, et l'on obtiendra de la sorte tous les idéauxpremiers.

Tous les nombres appartenant à cet idéal seront compris dans la formule

$$\begin{aligned} &P(N_0 + \alpha_1 N_1 + \ldots + \alpha_1^{p-1} N_{p-1}) \\ &+ (\alpha_1^p + a_{p-1}\alpha_1^{p-1} + \ldots + a_1\alpha_1 + a_0)(N_p + N_{p+1}\alpha_1 + \ldots + N_{m-1}\alpha_1^{m-p-1}), \end{aligned}$$

où les N sont des entiers indéterminés.

La trame de l'idéal se composera des deux nombres

$$P \text{ et } \alpha_1^p + a_{p-1}\alpha_1^{p-1} + \ldots + a_1\alpha_1 + a_0.$$

Puissances d'un idéal premier.

Envisageons l'idéal premier que je viens de définir.

Envisageons la congruence

$$(32) \qquad \xi^m - A_{m-1}\xi^{m-1} + \ldots \pm A_0 \equiv 0 \pmod{P^\lambda}.$$

L'un des facteurs irréductibles de cette congruence sera congru (module P) à

$$\xi^p + a_{p-1}\xi^{p-1} + a_{p-2}\xi^{p-2} + \ldots + a_0.$$

Or, on a pu choisir (31) d'une façon arbitraire, pourvu que a_{p-1}, a_{p-2}, ..., a_0 donnent certains restes à P. On aura donc pu le choisir de telle façon que ce soit un facteur irréductible de la congruence (32).

Cela posé, la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ de l'idéal premier considéré qui a pour trame

$$P \text{ et } \alpha_1^p + a_{p-1}\alpha_1^{p-1} + \ldots + a_1\alpha_1 + a_0$$

aura pour trame

$$P^\lambda, \ (a_1^p + a_{p-1}\alpha_1^{p-1} + \ldots + a_1\alpha_1 + a_0)^\lambda$$

et l'ensemble des nombres

$$(33) \qquad P^\mu(\alpha_1^p + a_{p-1}\alpha_1^{p-1} + \ldots + a_1\alpha_1 + a_0)^{\lambda-\mu}.$$

L'un des communs diviseurs des nombres compris dans l'expression (33), où

$$\mu = 1, 2, \ldots, \lambda - 1,$$

sera

$$\alpha_1^p + a_{p-1}\alpha_1^{p-1} + \ldots + a_0 = \text{H}.$$

Donc la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ cherchée sera divisible par l'idéal (34), dont tous les nombres sont donnés par la formule

$$P^\lambda(N_0 + \alpha_1 N_1 + \ldots + \alpha_1^{p-1} N_{p-1}) + P(N_p + N_{p+1}\alpha_1 + \ldots + N_{m-1}\alpha_1^{m-p-1}).$$

Or elle a même norme que cet idéal. Elle est donc identique à cet idéal.

Multiplication des idéaux premiers entre eux.

Tout idéal primitif ou non primitif peut être considéré à la fois comme le produit et comme le plus petit commun multiple d'un certain nombre d'idéaux primitifs premiers entre eux et puissances d'un idéal premier.

Nous savons maintenant former toutes les puissances d'un idéal premier. Comment maintenant multiplier entre elles deux pareilles puissances premières entre elles? Soient

$$(35)\qquad \begin{vmatrix} p^\lambda & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^\lambda & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(36)\qquad \begin{vmatrix} p^\mu & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & p^\mu & 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & p^\mu & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

les deux puissances à multiplier entre elles. Soit $\mu < \lambda$ et supposons les deux puissances premières entre elles; on devra avoir identiquement

$$\begin{aligned} &A_6 - A_5\xi^5 + A_4\xi^4 - A_3\xi^3 + A_2\xi^2 - A_1\xi + A_0 \\ &\quad \equiv (\xi^2 + a\xi + b)(\xi^3 + c\xi^2 + d\xi + e)(\xi - \lambda) \pmod{p^\lambda}. \end{aligned}$$

Le produit aura pour trame

$$p^{\lambda+\mu},\ p^\mu(\alpha_1^2 + \alpha_1 a + b),\ p^\lambda(\alpha_1^3 + c\alpha_1^2 + d\alpha_1 + e)$$

et

$$(\alpha_1^2 + \alpha_1 a + b)(\alpha_1^3 + c\alpha_1^2 + d\alpha_1 + e) = \alpha_1^5 + k\alpha_1^4 + l\alpha_1^3 + m\alpha_1^2 + n\alpha_1 + q.$$

Il aura pour norme

$$p^{2\lambda+3\mu}.$$

Envisageons le module

$$(37)\quad \begin{vmatrix} p^\lambda & 0 & bp^\mu & 0 & 0 & q \\ 0 & p^\lambda & ap^\mu & bp^\mu & 0 & n \\ 0 & 0 & p^\mu & ap^\mu & bp^\mu & m \\ 0 & 0 & 0 & p^\mu & ap^\mu & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^\mu & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il sera divisible par (35) et par (36), et par conséquent par leur plus petit commun multiple qui est leur produit. De plus il aura même norme que leur produit. Donc ce sera leur produit.

Dans le cas particulier $\lambda = \mu$, (37) se réduit à l'idéal primitif

$$\begin{vmatrix} p^\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & p^\lambda & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & p^\lambda & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & p^\lambda & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^\lambda & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On ferait de même pour multiplier entre eux plus de deux idéaux puissances d'un idéal premier.

Pour nous résumer et pour donner des résultats un énoncé simple, nous allons donner quelques définitions.

$F(\alpha_1)$ sera l'expression

$$\alpha_1^m - A_{m-1}\alpha_1^{m-1} + A_{m-2}\alpha_1^{m-2} - \ldots \pm A_0,$$

qui est nulle, comme on le sait, si l'on remplace α_1 par sa valeur tirée de l'équation (1).

Nous dirons qu'un nombre complexe

$$H_1 = \alpha_1^\mu + a_{\mu-1}\alpha_1^{\mu-1} + \ldots + a_0$$

est un facteur du nombre complexe

$$H_2 = \alpha_1^\nu + b_{\nu-1}\alpha_1^{\nu-1} + \ldots + b_0,$$

suivant le module B, si l'on veut trouver un nombre complexe

$$K = \alpha_1^{\nu-\mu} + c_{\nu\ \mu-1}\alpha_1^{\nu-\mu-1} + \ldots + c_0$$

tel que

$$H_2 - H_1 K$$

soit divisible par B.

De même nous dirons que H_1 est un facteur de $F(\alpha_1)$ suivant le module B, si l'on peut trouver un nombre complexe

$$K' = \alpha_1^{m-\mu} + c'_{m-\mu-1}\alpha_1^{m-\mu-1} + \ldots + c'_0$$

tel que

$$F(\alpha_1) - H_1 K'$$

soit divisible par B.

Règle pour former tous les idéaux dont la norme est une puissance *h* d'un nombre premier *p*.

Soient

H_1 un facteur de $F(\alpha_1)$, suivant le module p^h,
H_2 un facteur de $H_1, \ldots,$
H_n un facteur de H_{n-1}.

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ les ordres de $H_1, H_2, \ldots, H_n$.
Soit

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$$

une série de nombres entiers croissants, tels que

$$\lambda_1(m - \mu_1) + \lambda_2(\mu_1 - \mu_2) + \ldots + \lambda_n(\mu_{n-1} - \mu_n) + \lambda\mu_n = h.$$

Le module dont tous les nombres complexes sont compris dans la formule

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{P}\, p^{\lambda_1} H_1 (N_m + N_{m-1}\alpha_1 + \ldots + N_{\mu_1+1}\alpha_1^{m-\mu_1-1}) \\ & \quad + p^{\lambda_2} H_2 (N_{\mu_1} + N_{\mu_1-1}\alpha_1 + \ldots + N_{\mu_2+1}\alpha_1^{\mu_1-\mu_2-1}) \\ & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \quad + p^{\lambda_n} H_n (N_{\mu_{n-1}} + N_{\mu_{n-1}-1}\alpha_1 + \ldots + N_{\mu_n+1}\alpha_1^{\mu_{n-1}-\mu_n-1}) \\ & \quad + p^{\lambda} (N_{\mu_n} + N_{\mu_n-1}\alpha_1 + \ldots + N_1\alpha_1^{\mu_n-1}), \end{aligned}\right.$$

où les N sont des entiers indéterminés, sera un idéal de norme p^h et de plus on obtient par ce procédé tous les idéaux de norme p^h.

Il en résulte que le nombre des idéaux de norme p^h est fini; car $F(\alpha_1)$ n'admet qu'un nombre fini de facteurs H_1 suivant le module p^h, H_1 n'admet qu'un nombre fini de facteurs H_2 suivant le module p^h, ...

Il est vrai qu'on peut remplacer respectivement

$$H_1, H_2, \ldots, H_n$$

par

$$H_1 + p^h K_1,\ H_2 + p^h K_2,\ \ldots,\ H_n + p^h K_n,$$

$K_1, K_2, \ldots, K_n$ étant des nombres complexes quelconques d'ordre $\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \ldots, \mu_n - 1$, sans que ces nombres cessent d'être facteurs les uns des autres et de $F(\alpha_1)$ suivant le module p^h. Mais, en faisant cette substitution, on ne change pas l'idéal correspondant.

Remarquons que l'on peut disposer de $K_1, K_2, \ldots, K_n$, de telle sorte :

1° Que H_1 soit divisible par H_2, H_2 par H_3, $\ldots$, H_{n-1} par H_n;

2° Que H_1 soit un facteur de $F(\alpha_1)$ non seulement par rapport au module p^h, mais par rapport au module p^k, k étant aussi grand qu'on voudra.

Supposons, pour plus de simplicité, que l'on ait disposé ainsi de $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Soit à décomposer en facteurs premiers un idéal dont la norme est p^h.

Supposons (ce que nous pouvons toujours faire, ainsi qu'on vient de le voir) que H_2 divise H_1, H_3 divise H_2, ..., H_n divise H_{n-1}.

Soit

$$H_{n-1} = H_n K_{n-1},\quad H_{n-2} = H_{n-1} K_{n-2},\ \ldots,\ H_1 = H_2 K_1.$$

L'idéal (38), qu'il s'agit de décomposer en facteurs premiers, a pour trame

$$p^\lambda,\ p^{\lambda_n} H_n,\ p^{\lambda_{n-1}} H_{n-1},\ \ldots,\ p^{\lambda_2} H_2,\ p^{\lambda_1} H_1.$$

Il sera le produit des idéaux primitifs qui ont respectivement pour trames

$$p^{\lambda_1},\ (p^{\lambda_2-\lambda_1}, K_1),\ (p^{\lambda_3-\lambda_1}, K_2),\ \ldots,\ (p^{\lambda_n-\lambda_1}, K_{n-1}),\ (p^{\lambda-\lambda_1}, H_n).$$

Il reste à décomposer chacun de ces idéaux primitifs en facteurs premiers.

Envisageons le premier de ces idéaux, à savoir celui qui a pour trame p^{λ_1} : c'est la puissance λ_1 de celui qui a pour trame p; pour obtenir les facteurs premiers de cet idéal, envisageons la congruence

$$(39)\qquad \xi^m - A_{m-1}\xi^{m-1} + \ldots \pm A_0 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Décomposons-la en facteurs irréductibles et supposons que, si l'on remplace dans ces facteurs ξ par α_1, ils deviennent des nombres complexes $h_1, h_2, \ldots, h_q$. L'idéal dont la trame est p aura pour facteurs premiers les idéaux dont la trame est respectivement

$$(p,\ h_1),\ (p,\ h_2),\ \ldots,\ (p,\ h_q).$$

Envisageons maintenant l'idéal dont la trame est

$$p^{\lambda_2-\lambda_1},\ k_1 :$$

ce sera la puissance $\lambda_2 - \lambda_1$ de l'idéal dont la trame est

$$p,\ k_1.$$

Soit

$$k_1 = \alpha_1^\nu + a_{\nu-1}\alpha_1^{\nu-1} + \ldots + a_0.$$

Considérons les facteurs irréductibles de la congruence

$$\xi^\nu + a_{\nu-1}\xi^{\nu-1} + \ldots + a_0 \equiv 0 \pmod p$$

et supposons que, quand on y remplace, ξ par α_1, ils deviennent des nombres complexes

$$h'_1,\ h'_2,\ \ldots,\ h'_q.$$

Les facteurs premiers de l'idéal dont la trame est

$$p,\ k_1$$

seront es idéaux dont les trames sont respectivement

$$(p,\ h'_1),\ (p,\ h'_2),\ \ldots,\ (p,\ h'_q).$$

On opérerait de même pour les autres idéaux primitifs, de telle sorte que l'idéal (38) se trouvera décomposé en facteurs premiers.

Cas exceptionnels.

1° La congruence (39) est irréductible.

Dans ce cas il n'y a pas d'idéal dont la norme est p^h si h n'est pas divisible par m; il n'y en a qu'un si h est divisible par m : c'est celui dont la trame est $p^{\frac{h}{m}}$ et c'est la puissance $\frac{h}{m}$ de l'idéal dont la trame est p qui est premier.

2° La congruence (39) a des racines multiples.

Dans tout ce qui précède, on a supposé implicitement que la

congruence (39) n'avait pas de racine multiple. Remontons en effet jusqu'au point où il s'est agi de trouver la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ d'un idéal premier donné.

L'un des facteurs irréductibles de la congruence (32), ai-je dit, est congrue à (31) (mod P). Cela ne serait plus vrai si la congruence (32) ou, ce qui revient au même, la congruence (39) avait des racines multiples.

Ainsi la congruence

$$\xi^2 - D \equiv 0 \pmod{p^2}$$

admet ou n'admet pas de racines réelles, c'est-à-dire est décomposable ou non en deux facteurs irréductibles, selon que la congruence

$$\xi^2 - d \equiv 0 \pmod{p}$$

est elle-même réductible ou irréductible. Cela est vrai toutes les fois que D n'est pas divisible par p.

Supposons maintenant que D soit divisible par p sans l'être par p^2.

La première congruence sera irréductible, le premier membre de la seconde sera le carré du facteur irréductible ξ.

Pour voir comment on devra opérer pour lever cette difficulté, commençons par un exemple simple; soit

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} p & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

un idéal premier simple et supposons que ξ soit racine double de (39).

Cherchons le carré, le cube, etc., la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ de (40).

Supposons d'abord, toujours pour plus de simplicité, $\xi = 0$, ce qui exige

$$A_1 \equiv A_0 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Cherchons d'abord le carré de l'idéal donné

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Je dis que ce sera

$$(41)\qquad \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

En effet, il est aisé de constater que (41) est un idéal. Or le carré de (40) a pour trame

$$p^2,\ p\alpha_1,\ \alpha_1^2,$$

et, comme ces trois nombres font partie de (41), (41) divise le carré de (40). Or ces deux idéaux ont même norme. Donc ils sont identiques. C. Q. F. D.

Cherchons maintenant les puissances paires de (40), la puissance 2α par exemple. C'est chercher la puissance α de (41).

$F(\alpha_1)$ va admettre comme facteur suivant le module $p^{2\alpha}$ un certain facteur quadratique $\alpha_1^2 + \alpha_1\lambda + \mu$, tel que

$$\lambda \equiv \mu \equiv 0 \pmod{p}.$$

L'idéal (41) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} p & 0 & \mu & 0 \\ 0 & p & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il a alors pour trame

$$p \text{ et } \alpha_1^2 + \lambda\alpha_1 + \mu.$$

Sa puissance $\alpha^{\text{ième}}$ a pour trame

$$p^\alpha \quad \text{et} \quad p^{\alpha-\beta}(\alpha_1^2 + \lambda\alpha_1 + \mu)^\beta.$$

Elle est donc divisible par l'idéal dont la trame est

$$p^\alpha \quad \text{et} \quad \alpha_1^2 + \lambda\alpha_1 + \mu.$$

Or cet idéal s'écrit

$$(42)\qquad \begin{vmatrix} p^\alpha & 0 & \mu & 0 \\ 0 & p^\alpha & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et a par conséquent même norme que la puissance $\alpha^{\text{ième}}$ de (41). Donc (42) est la puissance $\alpha^{\text{ième}}$ de (41) et la puissance $2\alpha^{\text{ième}}$ de (40).

Cherchons maintenant la puissance $2\alpha+1^{\text{ième}}$ de (40) : c'est le produit de (40) et de (42); elle aura donc pour trame

$$p^{\alpha+1},\quad \alpha_1 p^{\alpha},\quad p(\alpha_1^2+\lambda\alpha_1+\mu),\quad \alpha_1(\alpha_1^2+\lambda\alpha_1+\mu).$$

Supposons, ce qu'on peut toujours faire, que $\alpha_1^2+\lambda\alpha_1+\mu$ soit un facteur $F(\alpha_1)$ suivant le module $p^{2\alpha+1}$.

$$(43)\qquad \begin{vmatrix} p^{\alpha+1} & 0 & \mu & 0 \\ 0 & p^{\alpha} & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

sera un idéal dont feront partie tous les nombres de la trame de la puissance cherchée et qui aura même norme que cette puissance; ce sera donc cette puissance elle-même.

Supposons maintenant que

$$F(\alpha_1) = \alpha_1^5 - A_4\alpha_1^4 + A_3\alpha_1^3 - A_2\alpha_1^2 + A_1\alpha_1 - A_0$$

admette comme facteur suivant le module p

$$(\alpha_1^2+\lambda\alpha_1+\mu)^2.$$

Il admettra comme facteur *irréductible* suivant le module p^h, h étant très grand,

$$\alpha_1^4 + H_3\alpha_1^3 + H_2\alpha_1^2 + H_1\alpha_1 + H_0,$$

où

$$H_0 \equiv \mu^2,\quad H_1 \equiv 2\lambda\mu,\quad H_2 \equiv \lambda^2+2\mu,\quad H_3 \equiv 2\lambda \pmod{p}.$$

Il y aura alors un idéal premier

$$\begin{vmatrix} p & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & p & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dont la puissance $2\alpha^{\text{ième}}$ sera

$$\begin{vmatrix} p^\alpha & 0 & 0 & 0 & H_0 \\ 0 & p^\alpha & 0 & 0 & H_1 \\ 0 & 0 & p^\alpha & 0 & H_2 \\ 0 & 0 & 0 & p^\alpha & H_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et la puissance $2\alpha + 1^{\text{ième}}$

$$\begin{vmatrix} p^{\alpha+1} & 0 & \mu p^\alpha & 0 & H_0 \\ 0 & p^{\alpha+1} & \lambda p^\alpha & \mu p^\alpha & H_1 \\ 0 & 0 & p^\alpha & \lambda p^\alpha & H_2 \\ 0 & 0 & 0 & p^\alpha & H_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Encore un exemple : supposons que $F(\alpha_1)$ admette le facteur

$$(\alpha_1 + \xi)^3$$

suivant le module p.

Il admettra comme facteur irréductible, suivant le module p^h, h étant très grand,

$$\alpha_1^3 + H_2\alpha_1^2 + H_1\alpha_1 + H_0,$$

où

$$H_2 \equiv 3\xi, \quad H_1 \equiv 3\xi^2, \quad H_0 \equiv \xi^3 \pmod{p}.$$

Il y aura alors un idéal premier

$$\begin{vmatrix} p & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dont les puissances $3\alpha^{\text{ième}}$, $(3\alpha + 1)^{\text{ième}}$, $(3\alpha + 2)^{\text{ième}}$ sont respectivement

$$\begin{vmatrix} p^\alpha & 0 & 0 & H_0 & 0 \\ 0 & p^\alpha & 0 & H_1 & H_0 \\ 0 & 0 & p^\alpha & H_2 & H_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & H_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} p^{\alpha+1} & \xi p^{\alpha} & 0 & H_0 & 0 \\ 0 & p^{\alpha} & \xi p^{\alpha} & H_1 & H_0 \\ 0 & 0 & p^{\alpha} & H_2 & H_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & H_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} p^{\alpha+1} & 0 & \xi^2 p^{\alpha} & H_0 & 0 \\ 0 & p^{\alpha+1} & 2\xi p^{\alpha} & H_1 & H_0 \\ 0 & 0 & p^{\alpha} & H_2 & H_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & H_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ces exemples suffiront, je pense, pour faire comprendre comment on devra se tirer d'affaire dans le cas exceptionnel qui nous occupe.

Multiplication de deux idéaux dont les normes sont premières entre elles.

Soient

$$\begin{vmatrix} abcd & abc\zeta & ab\varepsilon & a\gamma \\ 0 & abc & ab\delta & a\beta \\ 0 & 0 & ab & a\alpha \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1b_1c_1d_1 & a_1b_1c_1\zeta_1 & a_1b_1\varepsilon_1 & a_1\gamma_1 \\ 0 & a_1b_1c_1 & a_1b_1\delta_1 & a_1\beta_1 \\ 0 & 0 & a_1b_1 & a_1\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$$

les deux idéaux à multiplier. Leurs normes seront respectivement

$$N = a^4b^3c^2d, \quad N_1 = a_1^4b_1^3c_1^2d_1.$$

La norme de leur produit, qui est en même temps leur plus petit commun multiple, sera

$$NN_1 = (aa_1)^4(bb_1)^3(cc_1)^2(dd_1),$$

N étant premier avec N_1 et par conséquent a, b, c, d premiers avec a_1, b_1, c_1, d_1; on pourra trouver des nombres

$$A, B, \Gamma, \Delta, E, Z,$$

tels que

$$\begin{aligned} Z &\equiv \zeta \pmod{d}, & Z &\equiv \zeta_1 \pmod{d_1}, \\ E &\equiv \varepsilon \pmod{cd}, & E &\equiv \varepsilon_1 \pmod{c_1d_1}, \\ \Delta &\equiv \delta \pmod{c}, & \Delta &\equiv \delta_1 \pmod{c_1}, \\ \Gamma &\equiv \gamma \pmod{bcd}, & \Gamma &\equiv \gamma_1 \pmod{b_1c_1d_1}, \\ B &\equiv \beta \pmod{bc}, & B &\equiv \beta_1 \pmod{b_1c_1}, \\ A &\equiv \alpha \pmod{b}, & A &\equiv \alpha_1 \pmod{b_1}. \end{aligned}$$

Les idéaux sont alors équivalents à

$$\begin{vmatrix} abcd & abcZ & abE & a\Gamma \\ 0 & abc & ab\Delta & aB \\ 0 & 0 & ab & aA \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1b_1c_1d_1 & a_1b_1c_1Z & a_1b_1E & a_1\Gamma \\ 0 & a_1b_1c_1 & a_1b_1\Delta & a_1B \\ 0 & 0 & a_1b_1 & a_1A \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Leur produit divisera l'idéal

$$(44) \qquad \begin{vmatrix} abcda_1b_1c_1d_1 & abca_1b_1c_1Z & aba_1b_1E & aa_1T \\ 0 & abca_1b_1c_1 & aba_1b_1\Delta & aa_1B \\ 0 & 0 & aba_1b_1 & aa_1\Delta \\ 0 & 0 & 0 & aa_1 \end{vmatrix}$$

et, à cause de l'identité des normes, sera identique à (44).

Problème. — *Former tous les idéaux de norme* N.

On décomposera N en facteurs premiers; supposons qu'on obtienne de la sorte

$$N = p^h p_1^{h_1} p_2^{h_2}.$$

On formera tous les idéaux de nombre p^h, de norme $p_1^{h_1}$, de norme $p_2^{h_2}$ et on les multipliera entre eux d'après la règle précédente; on obtiendra ainsi tous les idéaux de norme N.

Problème. — *Reconnaître si un nombre* N *peut être représenté par la forme* $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

On formera tous les idéaux de norme N d'après la règle précédente. Supposons que tous les nombres complexes de l'un de ces idéaux soient compris dans la formule

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m,$$

où les β sont des nombres complexes donnés et les x des entiers indéterminés. On cherchera, d'après la méthode de M. Hermite, si les formes

$$N\,\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{et} \quad \text{norme}(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m)$$

sont équivalentes. Si elles le sont, le nombre N peut être représenté par Ψ.

Si aucun des idéaux de norme N ne donne une forme équivalente à $N\Psi$, le nombre N ne peut être représenté par Ψ.

Sachant reconnaître si un nombre entier donné peut être représenté par Ψ, on saura reconnaître s'il peut l'être par F.

Imperfection de la méthode.

Si l'on veut trouver toutes les représentations de N par F, on cherche toutes les représentations de $B_m^{m-1}N$ par Ψ; supposons que l'on trouve que Ψ devient égal à $B_m^{m-1}N$ quand on fait

$$x_1 = \beta_1, \quad x_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad x_m = \beta_m.$$

On rejettera toutes les solutions pour lesquelles on n'aura pas à la fois

$$\beta_3 = \beta_4 = \ldots = \beta_m = 0, \quad \beta_1 \equiv 0 \pmod{B_m}.$$

S'il en reste une, on saura que F devient égal à N quand on fait

$$x = \frac{\beta_1}{B_m}, \quad y = \beta_2.$$

On est donc obligé, pour trouver toutes les représentations de N par F, de chercher toutes les représentations de $B_m^{m-1}N$ par Ψ, dont la plus grande partie sera en général inutile. On est forcé, par conséquent, de former un plus grand nombre d'idéaux qu'il ne serait strictement nécessaire. C'est ce qui nous conduit à chercher quelques simplifications.

Pemière simplification. — Le problème de la représentation des nombres par F se ramène à celui de la représentation des nombres par Φ. Occupons-nous donc de ce second problème et cherchons à trouver des nombres entiers ξ, η, tels que

$$\Phi(\xi, \eta) = N,$$

N étant un entier donné.

(On peut toujours supposer que ξ et η sont premiers entre eux; car, s'ils ne l'étaient pas, N devrait être divisible par la puissance $m^{\text{ième}}$ de leur plus grand commun diviseur d et l'on devrait avoir

$$\Phi\left(\frac{\xi}{d}, \frac{\eta}{d}\right) = N d^{-m},$$

et le problème serait ramené à égaler Φ à Nd^{-m} en substituant à la place de x et de y deux nombres entiers $\frac{\xi}{d}$, $\frac{\eta}{d}$, premiers entre eux.)

Si l'on suppose le problème résolu, les nombres complexes compris dans la formule

$$(45) \qquad (\xi + \eta\alpha_1)(m_0 + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_1^2 + \ldots + m_{m-1}\alpha_1^{m-1})$$

forment un idéal de norme N et la méthode générale consiste à former tous les idéaux de norme N et à chercher s'ils peuvent se mettre sous la forme (45).

Est-il nécessaire pour cela de former *tous* les idéaux de norme N? Non, car je dis que (45) est un idéal simple. En effet, si $m = 5$ par exemple, cet idéal s'écrit

$$\begin{vmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & A_0\eta \\ \eta & \xi & 0 & 0 & -A_1\eta \\ 0 & \eta & \xi & 0 & A_2\eta \\ 0 & 0 & \eta & \xi & -A_3\eta \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \xi + A_4\eta \end{vmatrix},$$

ξ et η étant premiers entre eux; il en sera de même de η et $\xi + A_4\eta$; il existera deux nombres λ_1 et μ_1, tels que

$$\lambda_1\eta + \mu_1(\xi + A_4\eta) = 1.$$

On ne changera pas l'idéal en multipliant la cinquième colonne par μ_1 et y ajoutant la quatrième multipliée par λ_1 et (en même temps) en multipliant la quatrième colonne par $\xi + A_4\eta$ et en retranchant la cinquième multipliée par η; car le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \xi + A_4\eta & -\eta \end{vmatrix} = 1.$$

L'idéal devient ainsi

$$\begin{vmatrix} \xi & 0 & 0 & -A_0\eta^2 & \mu_1 A_0\eta \\ \eta & \xi & 0 & A_1\eta^2 & -\mu_1 A_1\eta \\ 0 & \eta & \xi & -A_2\eta^2 & \mu_1 A_2\eta \\ 0 & 0 & \eta & \xi^2 + A_4\eta\xi + A_3\eta^2 & \lambda_1\xi - \mu_1 A_3\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Les nombres η et $\xi^2 + A_4\eta\xi + A_3\eta^2$ sont premiers entre eux. Il existe donc deux nombres λ_2, μ_2, tels que

$$\lambda_2\eta + \mu_2(\xi_2 + A_4\eta\xi + A_3\eta^2) = 1.$$

On ne changera pas l'idéal en multipliant la quatrième colonne

par μ_2 et y ajoutant la troisième multipliée par λ_2, et en multipliant la troisième par $\xi^2 + A_4\eta\xi + A_3\eta^2$ et en retranchant la quatrième multipliée par η. L'idéal devient alors

$$\left|\begin{array}{ccccc} \xi & 0 & A_0\eta^3 & -\mu_2 A_0\eta^2 & \mu_1 A_0\eta \\ & \xi & -A_1\eta^3 & \mu_2 A_1\eta^2 & -\mu_1 A_1\eta \\ & \eta & \xi^3 + A_4\eta\xi^2 + A_3\eta^2\xi + A_2\eta^3 & \lambda_2\xi - \mu_2 A_2\eta^2 & \mu_1 A_2\eta \\ & 0 & 0 & 1 & \lambda_1\xi - \mu_1 A_3\eta \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Les nombres η et $\xi^3 + A_4\eta\xi^2 + A_3\eta^2\xi + A_2\eta^3$ sont premiers entre eux, etc.; il est aisé de voir qu'en continuant de la sorte, on amènera l'idéal à la forme

$$\left|\begin{array}{ccccc} N & a & b & c & d \\ 0 & 1 & e & f & g \\ 0 & 0 & 1 & h & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|,$$

ce qui montre que c'est un idéal simple.

Donc, au lieu de former *tous* les idéaux de norme N, il suffira de former tous les idéaux simples de norme N.

Problème. — *Trouver toutes les représentations de* N *par* Φ.

Ce qui précède nous conduit à la règle suivante :

On envisagera la congruence

$$(46) \qquad \xi^m - A_{m-1}\xi^{m+1} + A_{m-2}\xi^{m-2} - \ldots \pm A_0 \equiv 0 \pmod{N}.$$

Soit ξ l'une des racines de cette congruence.

Si les deux formes

$$N\,\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

et

$$\text{norme}[N x_1 + (\alpha_1 - \xi)(x_2 + x_3\alpha_1 + x_4\alpha_1^2 + \ldots + x_m\alpha_1^{m-2})]$$

sont équivalentes et que l'on passe de la seconde à la première en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{1,1}y_1 + \lambda_{1,2}y_2 + \ldots + \lambda_{1,m}y_m, \\ x_2 &= \lambda_{2,1}y_1 + \lambda_{2,2}y_2 + \ldots + \lambda_{2,m}y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \lambda_{m,1}y_1 + \lambda_{m,2}y_2 + \ldots + \lambda_{m,m}y_m. \end{aligned}$$

si l'on a

$$\lambda_{3,1} = \lambda_{4,1} = \ldots = \lambda_{m,1} = 0,$$

on égalera Φ à N en posant

$$x = N\lambda_{1,1} - \xi\lambda_{2,1}, \quad y = \lambda_{2,1},$$

et l'on obtiendra de la sorte toutes les représentations de N par Φ.

Sur l'équation indéterminée $x^3 + y^3 = z^3$;
par M. R. Perrin.

(Séance du 6 mai 1885.)

1. On sait que Fermat a annoncé l'impossibilité de décomposer un cube en deux autres cubes, et généralement une puissance quelconque en deux puissances du même nom, au-dessus de la seconde; mais que cette impossibilité n'a été démontrée jusqu'ici que pour les puissances dont l'indice est un multiple de 4 (¹). Je me propose de montrer, pour le cas particulier du cube, que si l'on peut déterminer une solution, en nombres entiers et premiers entre eux (on peut se borner à considérer les solutions de cette nature), de l'équation

$$(1) \qquad x^3 + y^3 = z^3,$$

on en déduira immédiatement une série indéfinie d'autres solutions, toujours en nombres entiers et premiers entre eux, toutes différentes entre elles; chaque solution de cette série comprend en effet, sur les trois entiers qui la constituent, un entier au moins égal à trois fois le produit des trois entiers constituant la solution immédiatement précédente; et la série peut ainsi être considérée comme fournissant des solutions indéfiniment croissantes.

2. Pour arriver à ces résultats de la manière la plus simple, je

---

(¹) Le théorème de Fermat a été démontré pour un très grand nombre d'indices premiers impairs et en particulier pour l'indice 3. Nous insérons néanmoins l'analyse de M. Perrin, dont on peut se servir pour simplifier la démonstration de cette impossibilité. (*Note de la Rédaction.*)



partirai de l'identité

$$(2)\qquad (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a),$$

à laquelle satisfont trois quantités quelconques a, b, c. Si l'on suppose que a, b, c soient trois entiers, positifs ou négatifs, satisfaisant à l'équation (1) mise sous la forme symétrique

$$(3)\qquad a^3+b^3+c^3=0,$$

ils satisferont donc par cela même à l'équation

$$(4)\qquad (a+b+c)^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a);$$

et réciproquement, les équations (3) et (4) sont entièrement équivalentes. Si de plus on suppose a, b, c premiers entre eux, il en sera de même de $a+b$, $b+c$, $c+a$: car tout facteur premier de $a+b$, par exemple, divise $a+b+c$ et par suite c en vertu de (4); s'il divisait encore $b+c$ ou $c+a$, il diviserait b ou a en même temps que c, ce qui est contraire à l'hypothèse. Dès lors, $a+b$, $b+c$, $c+a$ doivent être des cubes parfaits, abstraction faite des puissances de 3; et si l'on désigne par α, β, γ trois entiers premiers entre eux et avec 3, et par n un entier positif au moins égal à 1, l'équation (4) ne peut être satisfaite qu'à la condition de poser

$$(5)\qquad \begin{cases} a+b = 3^{3n-1}\gamma^3, \\ b+c = \alpha^3, \\ c+a = \beta^3; \end{cases}$$

d'où

$$(6)\qquad a+b+c = 3^n\alpha\beta\gamma.$$

α, β, γ seront donc liés par l'équation de condition

$$(7)\qquad \alpha^3+\beta^3+3^{3n-1}\gamma^3 - 2.3^n\alpha\beta\gamma = 0,$$

et a, b, c auront pour expressions, en fonction de α, β, γ,

$$(8)\qquad \begin{cases} a = \alpha(3^n\beta\gamma - \alpha^2), \\ b = \beta(3^n\alpha\gamma - \beta^2), \\ c = 3^n\gamma(\alpha\beta - 3^{2n-1}\gamma^2). \end{cases}$$

Trouver trois entiers a, b, c premiers entre eux satisfaisant à l'équation (3) revient donc à trouver trois entiers α, β, γ premiers entre eux et avec 3, satisfaisant à l'équation (7).

3. Posons maintenant

$$(9)\quad \begin{cases} a_1 + b_1 = 9a^3b^3c^3, \\ b_1 + c_1 = (a^2b + b^2c + c^2a)^3. \\ c_1 + a_1 = (a^2c + c^2b + b^2a)^3. \end{cases}$$

Je dis qu'on aura

$$(10)\quad (a_1 + b_1 + c_1)^3 = 3(a_1 + b_1)(b_1 + c_1)(c_1 + a_1),$$

et, par suite,

$$(11)\quad a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 = 0.$$

En effet, la relation (10) revient, en vertu de (9), à celle-ci

$$[9a^3b^3c^3 + (a^2b + b^2c + c^2a)^3 + (a^2c + c^2b + b^2a)^3]^3$$
$$= 8.27a^3b^3c^3(a^2b + b^2c + c^2a)^3(a^2c + c^2b + b^2a)^3,$$

c'est-à-dire à

$$9a^3b^3c^3 + (a^2b + b^2c + c^2a)^3 + (a^2c + c^2b + b^2a)^3$$
$$= 6abc(a^2b + b^2c + c^2a)(a^2c + c^2b + b^2a),$$

laquelle se vérifie immédiatement, en développant et tenant compte de (3).

D'ailleurs l'équation (10) donne, en tenant compte de (9),

$$a_1 + b_1 + c_1 = 3abc(a^2b + b^2c + c^2a)(a^2c + c^2b + b^2a)$$

et, par suite, a_1, b_1, c_1 ont respectivement pour valeurs

$$(12)\quad \begin{cases} a_1 = 3abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 3a^2b^2c^2) - (a^2b + b^2c + c^2a)^3, \\ b_1 = 3abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 3a^2b^2c^2) - (a^2c + c^2b + b^2a)^3, \\ c_1 = 3abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3). \end{cases}$$

a_1, b_1, c_1 sont premiers entre eux. En effet, puisque c admet le facteur 3 à la puissance n, et que a et b ne l'admettent pas, c_1 l'admettra à la puissance $n+1$; mais a_1 et b_1 ne l'admettront pas, comme on le voit à l'inspection des formules (12). Soit ensuite un facteur premier, autre que 3, commun à a_1 et c_1 par exemple; il divisera aussi b_1 en vertu de (11), donc aussi $a_1 + b_1$, donc aussi a, b, ou c en vertu de la première des équations (9). Divisant a_1 et a, par exemple, il devra diviser $a^2b + b^2c + c^2a$ en vertu de la première des équations (12), c'est-à-dire b^2c, c'est-à-dire b ou c en même temps que a, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc enfin a_1, b_1, c_1 fournissent une seconde solution en nombres entiers et premiers entre eux de l'équation (3). D'ailleurs c_1 étant au moins égal, en valeur absolue, à $3\,abc$, cette solution est essentiellement distincte de la première.

En opérant sur a_1, b_1, c_1 comme il a été fait sur a, b, c, on obtiendra évidemmment une troisième solution, distincte des deux premières, et ainsi de suite indéfiniment, ce qui est bien le résultat annoncé.

On peut remarquer que, si l'on veut introduire pour la seconde solution (a_1, b_1, c_1) des quantités α_1, β_1, γ_1, analogues aux quantités α, β, γ, considérées pour la première, on aura les groupes de relations

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= a^2b + b^2c + c^2a,\\ \beta_1 &= a^2c + c^2b + b^2a,\\ \gamma_1 &= \frac{abc}{3^n}; \end{aligned}\right.$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 3^{n+2}\gamma_1^3,\\ b_1 + c_1 &= \alpha_1^3,\\ c_1 + a_1 &= \beta_1^3; \end{aligned}\right.$$

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1(3^{n+1}\beta_1\gamma_1 - \alpha_1^2),\\ b_1 &= \beta_1(3^{n+1}\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2),\\ c_1 &= 3^{n+1}\gamma_1(\alpha_1\beta_1 - 3^{2n+1}\gamma_1^2), \end{aligned}\right.$$

et enfin, entre α_1, β_1, γ_1, la relation de condition

$$(16)\qquad \alpha_1^3 + \beta_1^3 + 3^{3n+2}\gamma_1^3 - 2.3^{n+1}\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0,$$

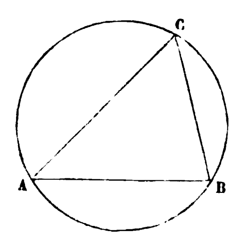
qui correspond à (7) et n'en diffère que par le changement de n en $n+1$. Chacune des solutions successives répond donc à une valeur de l'exposant n plus élevée d'une unité.

Sur le problème de la construction du cercle minimum renfermant n points donnés d'un plan; par M. CHRYSTAL [1].

(Traduit de l'anglais par M. l'abbé Pautonnier.)

(Séance du 20 juin 1884.)

Si nous considérons le cercle circonscrit à un triangle ABC et si nous diminuons son rayon en faisant cependant passer encore le cercle par A et B, alors si ACB est un angle aigu, C sera en dehors du cercle; mais, si ACB est obtus, C reste à l'intérieur du



cercle. Si C est un angle droit du cercle, le rayon du cercle étant égal à $\frac{1}{2}$AB ne peut être diminué.

Ce résultat, qui sera utilisé dans ce qui suit, conduit d'abord à la conséquence, d'ailleurs évidente, que le cercle minimum renfermant trois points donnés est le cercle qui passe par ces points s'ils déterminent un triangle acutangle ou rectangle, que c'est le cercle ayant pour diamètre la droite qui joint les deux points les plus éloignés dans le cas où le triangle des trois points est obtusangle.

Soient maintenant n points. Nous pouvons toujours en choisir m formant les sommets d'un polygone convexe renfermant tous les autres. Le problème se ramène donc à trouver le cercle minimum renfermant un polygone convexe.

De ce que le polygone est tout entier du même côté de l'un quelconque de ses côtés prolongé indéfiniment, on peut regarder cette

[1] *Voir* le Mémoire de M. d'Ocagne, sur le même sujet, dans le *Bulletin*, t. XII, p. 168.



ligne comme un cercle de rayon infini renfermant le polygone. Faisons diminuer son rayon d'une manière continue en supposant qu'il passe toujours par les deux sommets considérés. Deux cas peuvent se présenter : ou bien le rayon diminuera jusqu'à sa plus petite valeur (la moitié du côté du polygone) avant que le cercle laisse en dehors aucun sommet du polygone; dans ce cas le cercle ayant pour diamètre le côté choisi contient les n points, et ne peut être diminué, puisqu'il n'y a pas de cercle plus petit qui contienne les deux sommets considérés; ou bien le cercle, avant d'arriver à son minimum, passera par un troisième sommet du polygone; dans ce cas, si les trois sommets forment un triangle acutangle, le cercle minimum est obtenu, puisque le cercle considéré contient tous les points du polygone, et qu'aucun cercle moindre ne pourra contenir les trois points en question. Si le triangle est obtusangle, nous observons d'abord que *le côté obtus ne peut être opposé au côté choisi,* car nous n'avons pas atteint d'après l'hypothèse le rayon minimum qui correspond à un angle droit. L'angle obtus a donc pour sommet l'un ou l'autre des sommets situés sur le côté choisi. Laissant de côté le sommet de l'angle obtus, faisons diminuer le rayon du cercle qui passe encore par les deux sommets conservés. De cette manière le sommet négligé se trouve à l'intérieur du cercle diminué et n'est plus à considérer. Continuant ainsi, nous arriverons comme précédemment à un cercle minimum ayant pour diamètre la droite qui joint les deux sommets conservés, où nous arriverons à un cercle passant par trois sommets du polygone qui sera le cercle minimum si les trois sommets forment un triangle acutangle, ou qu'on peut encore diminuer si ce triangle est obtusangle, en remarquant comme plus haut que le sommet de l'angle obtus ne peut être le dernier sommet atteint, et ainsi de suite.

De ce que le rayon du cercle va constamment en diminuant, l'opération doit se terminer et cela de l'une ou des deux manières, c'est-à-dire ou bien le cercle minimum se présentera comme le cercle décrit sur un côté ou sur une diagonale du polygone comme diamètre (côté ou diagonale qui seront la plus grande distance entre deux des n points), ou bien le cercle minimum se présentera comme le cercle circonscrit à un triangle acutangle déterminé par trois sommets du polygone. Dans certains cas limites, le cercle peut passer par d'autres points que les deux ou les trois qui le dé-

terminent, mais cela n'affecte en rien les conclusions au point de vue topographique ; il est intéressant de remarquer que ces systèmes de points se divisent en deux classes distinctes chacune contenant des cas limites, suivant que le cercle minimum est déterminé par deux ou trois d'entre eux.

La discussion précédente suggère la méthode pratique suivante pour déterminer le cercle minimum d'un système de points.

Il faut construire un polygone convexe enfermant tous les points en prenant m points pour sommets. On prend un côté quelconque de ce polygone et l'on trouve le sommet pour lequel il sous-tend le plus petit angle. Si ce plus petit angle est droit ou obtus, le cercle minimum est celui qui a pour diamètre le côté choisi. Si le triangle formé est acutangle, le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle minimum, sinon on prend le côté opposé à l'angle obtus et l'on trouve le sommet pour lequel il sous-tend le plus petit angle et l'on continue comme précédemment.

Le nombre d'opérations dépend naturellement du premier côté choisi; il est clair cependant qu'aucun côté ou polygone ne peut être choisi plus d'une fois; par suite $\frac{1}{2}m(m-1)$ est une limite supérieure du nombre des opérations.

Dans certains cas particuliers, il pourra être plus expéditif d'essayer d'abord si le cercle décrit sur le plus grand côté ou la plus grande diagonale comme diamètre contient tous les points; s'il n'en est pas ainsi, alors le cercle minimum sera obtenu en trouvant le triangle formé par trois sommets du polygone qui a le plus grand cercle circonscrit.

Le problème du cercle minimum renfermant n points a naturellement son importance dans la théorie du potentiel de points situés dans un plan ; il peut aussi avoir quelque intérêt dans les sujets connexes de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

Une discussion semblable peut s'appliquer au problème de construire la sphère minimum renfermant n points de l'espace. Il y a trois cas suivant que la sphère minimum est déterminée par deux, par trois ou par quatre des points. Il n'y a qu'à substituer au triangle acutangle un tétraèdre acutangle, c'est-à-dire tel que chaque face sépare la sphère circonscrite en deux segments dont le plus grand supérieur à un hémisphère soit celui qui contient le sommet opposé.

Sur les rayons de courbure de deux courbes qui rencontrent les tangentes d'une troisième courbe sous des angles liés par une relation donnée ([1]); par E. Habich, Directeur de l'École des Mines de Lima.

(Séance du 6 mai 1885.)

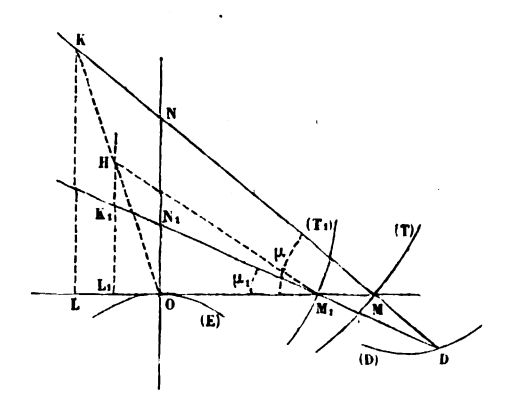
1. Soient (E) une courbe plane donnée et (T) et (T_1) deux autres courbes qui rencontrent les tangentes de la première sous des angles dont les compléments μ et μ_1 sont liés par l'équation

$$f(\mu, \mu_1) = 0; \tag{1}$$

μ et μ_1 sont évidemment les angles formés par les normales aux courbes (T) et (T_1) avec les tangentes de la courbe (E). Nous appelons la ligne (E) *courbe de référence* et les lignes (T) et (T_1) *transformées*, l'une de l'autre, par rapport à la courbe (E) et suivant le procédé défini par l'équation (1).

Si la *courbe de référence* (E) se réduit à un point, on rentre dans les coordonnées polaires.

Appelant ds l'arc élémentaire d'une courbe (T), correspondant



à l'angle $d\theta$ des tangentes, tracées par ses extrémités à la courbe de référence (E); $n = MN$ la longueur de la normale comprise

([1]) Voir *Annali di Matematica*, t. II, p. 138; Milan, 1868, et *Études cinématiques*, p. 40; Paris, 1879.

entre M et le point N où elle rencontre la normale en O à la courbe (E); ρ et $d\varepsilon$ le rayon de courbure et l'angle de contingence de la ligne (T); on a les relations connues

(2) $$ds = n\,d\theta = \rho\,d\varepsilon,$$

(3) $$d\theta = d\mu + d\varepsilon;$$

d'où

(4) $$\frac{d\mu}{d\theta} = 1 - \frac{d\varepsilon}{d\theta} = 1 - \frac{n}{\rho} = \frac{\rho - n}{\rho}.$$

Différentiant l'équation (1), par rapport à l'angle polaire θ,

(5) $$\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d\mu}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial \mu_1}\frac{d\mu_1}{d\theta} = 0,$$

où

(6) $$\frac{\partial f}{\partial \mu} : \frac{\partial f}{\partial \mu_1} = -\frac{d\mu_1}{d\mu} = -\lambda$$

et, combinant avec (4) et (5),

(7) $$\frac{\rho - n}{\rho} - \lambda\,\frac{\rho - n}{\rho_1} = 0.$$

Projetant en L et L_1 sur la droite MM_1O les centres de courbure K et K_1, on trouve

$$\frac{\rho - n}{\rho} = \frac{NK}{MK} = \frac{OL}{ML} \quad \text{et} \quad \frac{\rho_1 - n_1}{\rho_1} = \frac{N_1K_1}{M_1K_1} = \frac{OL_1}{M_1L_1},$$

et la relation (7) devient

$$\frac{OL}{ML} = \lambda\,\frac{OL_1}{M_1L_1}.$$

Traçant la droite KO, qui rencontre la perpendiculaire K_1L_1 en H, on trouve

$$\frac{OL}{OL_1} = \frac{KL}{KL_1} = \lambda\,\frac{ML}{M_1L_1},$$

d'où

$$\frac{KL}{ML} = \lambda\,\frac{HL_1}{M_1L_1}$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\mu = \lambda \operatorname{tang}\xi \quad (\xi = HM_1O).$$

Au moyen de cette relation on peut déterminer le centre de

la courbure de la transformée (T), lorsqu'on connaît celui de (T) ou *vice versa*.

Cherchons maintenant la forme de la fonction des angles (1), pour le cas où les centres de courbure de deux lignes (T) et (T_1) se trouvent sur une même droite passant par le pôle correspondant de transformation O.

Pour cela, il faut que les angles

$$L_1 M_1 H = K_1 M_1 L_1, \quad \xi = \mu,$$

et

$$\tang \xi = \tang \mu_1;$$

d'où

$$\tang \mu = \pm \lambda \tang \mu_1.$$

Remplaçant λ par sa valeur (6), on aura

$$\frac{d\mu}{\tang \mu} \mp \frac{d\mu_1}{\tang \mu_1} = 0,$$

et, intégrant,

$$\sin \mu - c \sin \mu_1 = 0 \tag{8}$$

et

$$\sin \mu \sin \mu_1 = c_1. \tag{9}$$

On satisfait à la condition demandée, de la correspondance des centres de courbure, des transformées (T) et (T_1) par les relations (8) et (9) ou par une fonction quelconque (1) du rapport c ou du produit c_1 des sinus des angles μ et μ_1 ($c_1 < \pm 1$).

Les cas de similitude et de l'inversion sont compris dans la relation (8) et correspondent au rapport c égal à $+1$ et à -1.

I. *Application aux caustiques par réfraction.* — Considérons la courbe (D), lieu des intersections des normales aux points correspondants M et M_1 de deux transformées (T) et (T_1); on a

$$MD : M_1 D = \sin \mu_1 : \sin \mu,$$

c'est-à-dire que le rapport des distances d'un point D de la ligne (D) aux deux courbes (T) et (T_1) est égal à celui des sinus des angles que forment ces distances MD et $M_1 D$ avec la droite qui réunit les points correspondants M et M_1.

Il s'ensuit que, à une équation homogène entre les distances

MD et M_1D correspond une équation homogène entre les $\sin\mu$ et $\sin\mu_1$ et *vice versa*.

En particulier, si le rapport de deux distances MD et M_1D était constant, la ligne (D) serait la dirimante (la réfringente) des rayons lumineux incidents normaux à la courbe (T) et qui, après la réfraction, seraient normaux à la courbe (T_1); — (T) et (T_1) sont les anticaustiques des rayons incidents et des rayons réfractés et leurs développées les caustiques de ces mêmes rayons ([1]).

Comme le cas considéré correspond à la fonction des angles (δ), on a ce théorème : *Que la droite qui réunit les points correspondants* M *et* M_1 *de deux anticaustiques* (T) *et* (T_1) *et la droite* KK_1 *qui réunit leurs centres de courbure (points correspondants des caustiques) se rencontrent au point* O, *où la droite* MM_1 *touche son enveloppe* (E).

Sur les courbes polaires réciproques homologiques;
par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 17 juin 1885.)

Soient C et C′ deux courbes polaires réciproques par rapport à une conique K. Prenons sur C un point P et la tangente t en ce point; soient t' et P′ la tangente et le point correspondants sur C′. Si toutes les droites, telles que PP′, passent par un même point A, tous les points, tels que t, t', sont situés sur une même droite a, polaire de A par rapport à K; par suite, les courbes C et C′ sont *homologiques*, le point A étant le *centre* et la droite a l'*axe d'homologie*.

Nous nous proposons de rechercher toutes les courbes qui sont homologiques de leur polaire réciproque par rapport à une conique K donnée, les points correspondants étant les mêmes dans les deux cas, ou, en d'autres termes, les courbes telles que les droites qui joignent deux points correspondants, l'un sur la courbe, l'autre sur la polaire réciproque, passent par un même point.

([1]) *Annali di Matematica*, p. 141-145; 1869.

Soit

$$f(X, Y, Z) = 0$$

l'équation homogène de la conique directrice K.

La polaire t' du point $P(x, y, z)$ de la courbe C a pour équation

$$x f'_X + y f'_Y + z f'_Z = 0.$$

Le point P′ où cette droite touche son enveloppe C′ est donné par son intersection avec la droite

$$dx f'_X + dy f'_Y + dz f'_X = 0.$$

L'équation de la droite PP′ sera donc

$$\frac{dx f'_X + dy f'_Y + dz f'_Z}{x f'_X + y f'_Y + z f'_Z} = \frac{dx f'_x + dy f'_y + dz f'_z}{x f'_x + y f'_y + z f'_z}$$

ou, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$\frac{dx f'_X + dy f'_Y + dz f'_Z}{x f'_X + y f'_Y + z f'_Z} = \frac{dx f'_x + dy f'_y + dz f'_z}{2 f(x, y, z)}.$$

Pour que cette droite passe par un point fixe (x_1, y_1, z_1), il faut que l'on ait, quel que soit le point (x, y, z) de la courbe C,

$$\frac{dx f'_{x_1} + dy f'_{y_1} + dz f'_{z_1}}{x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1}} = \frac{dx f'_x + dy f'_y + dz f'_z}{2 f(x, y, z)}.$$

Posons

$$f(x, y, z) = S, \quad x f_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = M;$$

l'équation précédente devient

$$\frac{dM}{M} = \frac{dS}{2S},$$

d'où, en intégrant,

$$S - \lambda M^2 = 0,$$

λ étant une constante arbitraire. On trouve donc l'équation des coniques bitangentes à la conique directrice K, la corde des contacts étant la polaire du point (x_1, y_1, z_1) par rapport à K.

Ainsi, *les seules courbes qui soient homologiques de leurs polaires réciproques, les points correspondants étant les mêmes dans les deux cas, sont les coniques bitangentes à la conique directrice*. L'axe d'homologie se confond avec la corde des contacts, le centre d'homologie avec le pôle de cette corde.

En particulier, on sait que le lieu du sommet d'un angle constant (courbe isoptique) dont les côtés sont tangents à une parabole est une hyperbole bitangente à cette parabole, la corde des contacts étant la directrice de cette parabole. Donc, *si* H *est une hyperbole isoptique de la parabole* P, H' *la polaire réciproque de* H *par rapport à* P, *les droites qui joignent les points de* H *aux points correspondants de* H' *passent toutes par le foyer de* P. Nous avions, par une voie indirecte, obtenu géométriquement ce théorème dans une de nos Notes sur la symédiane ([1]).

Réponse à la Note de M. Rouché (*Bulletin*, n° 3, 1885);
par M. Ernest Lebon.

Lorsque j'ai communiqué à la Société mathématique la construction que je propose, j'ai exprimé des doutes au sujet de sa nouveauté, et aucun des auditeurs n'a présenté d'observation. De plus, j'avais auparavant parcouru les principaux Ouvrages de Géométrie descriptive, sans y trouver cette application d'un théorème connu. Il est important que je donne le résultat de mes recherches dans deux de ces Ouvrages.

1° *Cours de Géométrie descriptive*, par M. Théodore Olivier, troisième édition, revue et annotée par M. Eugène Rouché; 1er novembre 1871. — A l'art. 388, l'auteur explique l'épure de l'ombre du puits militaire. La construction de la tangente en un point d'origine de la courbe d'ombre n'est pas indiquée. Je suis surpris que M. Rouché, qui affirme donner « régulièrement sous la même forme dans ses leçons depuis 1862 » la construction que j'ai proposée, n'ait pas pensé à réparer, par une note, une omission évidente et importante.

2° *Théorie des Ombres et du Lavis*, par J. Pillet, 1882. — Dans ma Communication du 12 novembre 1884, j'ai résumé la construction de cet auteur pour le cas du cylindre de révolution. Ici j'ajoute que, à la page 160 de son Ouvrage, M. J. Pillet, en parlant des

---

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 462, § 26.

points d'origine dans le cas d'un cône creux, écrit : « Il serait intéressant d'avoir les tangentes en ces points; mais leur recherche serait un peu trop compliquée. » Il me paraît bien étonnant que M. J. Pillet n'ait pas au moins signalé en 1882 une construction simple « donnée depuis 1862 » par son collègue à l'École Polytechnique.

Ma bonne foi étant mise en évidence par ce qui précède, il me reste à faire remarquer qu'il est nécessaire que M. Rouché : 1° prouve que l'application dont il conteste la nouveauté existait « en 1862 » et « qu'il la donne régulièrement sous la même forme dans ses leçons depuis 1862 »; 2° cite les pages des « Ouvrages très répandus » où elle est « imprimée » ; 3° produise la preuve qu'elle est « enseignée dans tous les cours de Mathématiques spéciales de Paris ». Sinon, la réclamation vague de M. Rouché ne peut arrêter l'attention et fixer l'opinion des géomètres.

Paris, 7 juin 1885.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XIII.

FIN DE LA TABLE DU TOME XIII.



10631 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence, qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des Mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tout les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

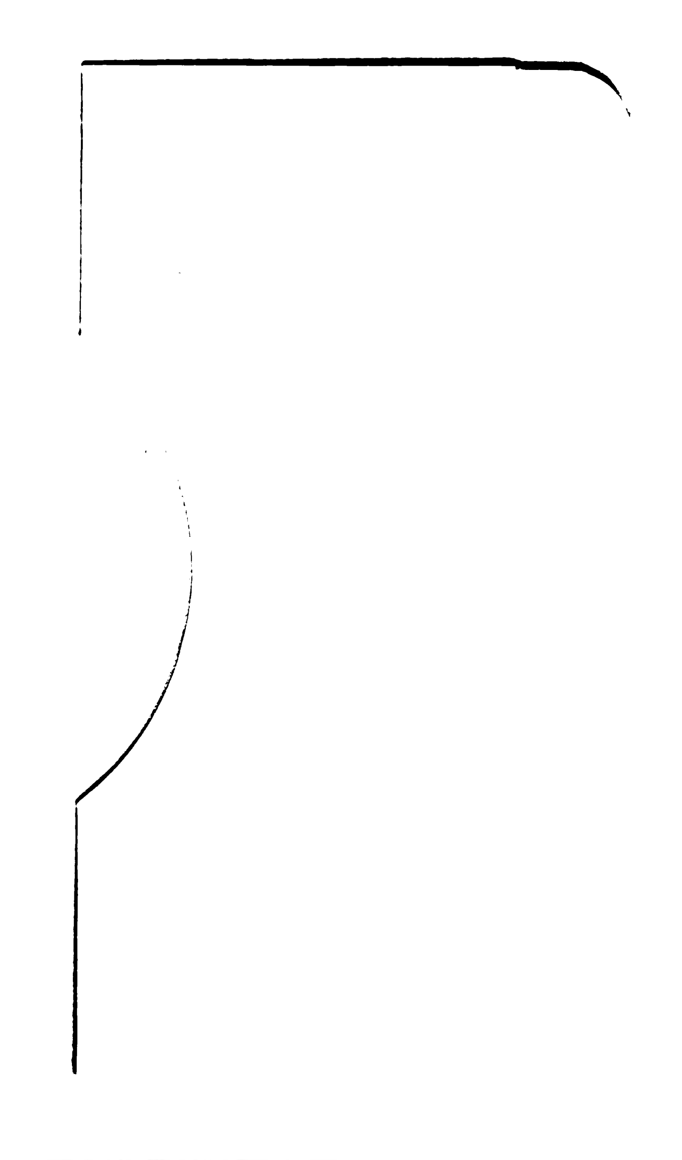
	Le volume. fr
Dix volumes au moins	4,60
De cinq à neuf volumes	5,00
Moins de cinq volumes	6,00

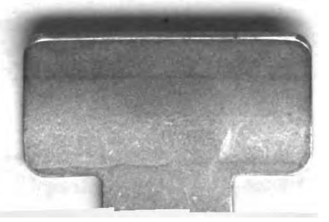
TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

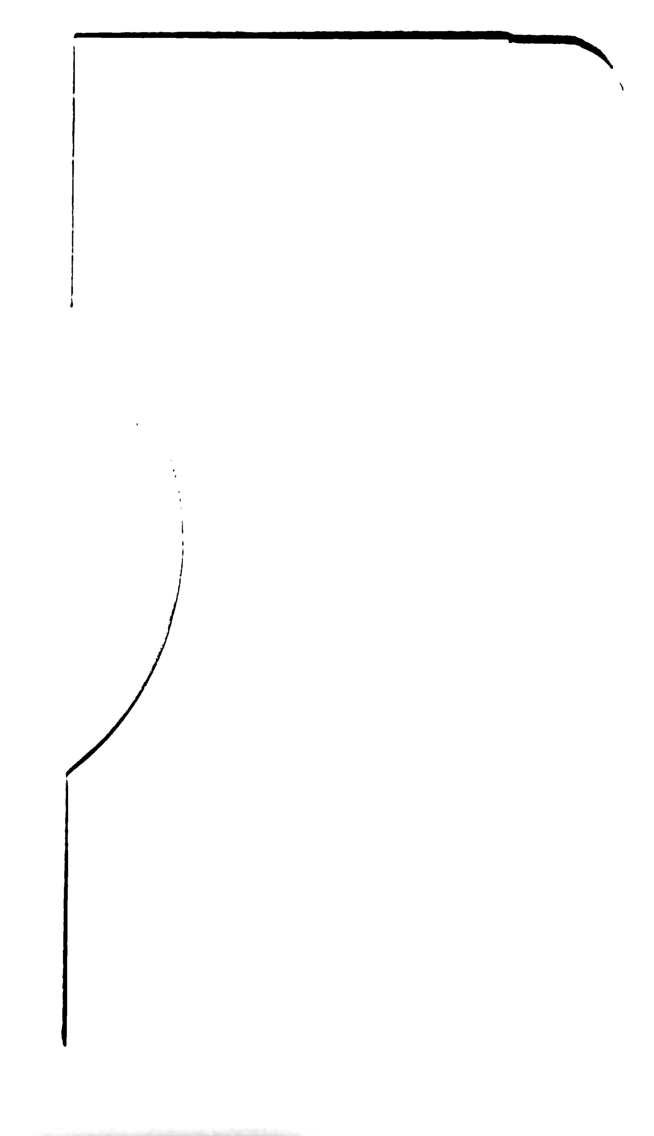
Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.














32101 044852745



